Дискретная математика

Лекция 1
Множества

Цель лекции – познакомить студентов:

1) с общими понятиями теории множеств;

2) с основными операциями над множествами;

3) с соответствиями между множествами и с отображениями;

4) с классификацией множеств и с мощностью множества;

5) с кортежами и с декартовыми произведениями;
6) с отношениями, с бинарными отношениями и их свойствами;
7) с элементами комбинаторики;
8) с подстановками.

Введение

Дискретная математика – направление в математике, объединяющее отдельные её разделы, ранее сформированные как самостоятельные теории. К ним относятся математическая логика и теории множеств, графов, кодирования, автоматов.

Дискретной математикой называют совокупность математических дисциплин, изучающих свойства математических моделей объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, которыми оперируют в различных областях знаний.

Дискретная математика использует средства, разработанные в классической математике. Однако характер объектов, исследуемых дискретной математикой, настолько разнообразен, что методов классической математики не всегда достаточно для их изучения. Поэтому те специфические методы, которые применяют для очень широкого класса *конечных* дискретных (имеющих прерывный характер) объектов, и были объединены в общее направление – дискретную математику.

В настоящее время знание дискретной математики необходимо специалистам в различных областях деятельности.

1.1. Общие понятия теории множеств

Совокупность элементов, объединённых некоторым признаком, свойством, составляет понятие **множество**. Например, *множество* книг в библиотеке, *множество* студентов в группе, *множество* натуральных чисел N и т. д.

Запись $a \in M$ означает: элемент *a* *принадлежит* множеству *M*, т. е. элемент *a* обладает некоторым признаком. Аналогично $a \notin M$ читается: элемент *a* *не принадлежит* множеству *M*.

Изображение множеств

Множества удобно изображать с помощью *кругов Эйлера.*

Множество *K* на рис. 1.1 называют **подмножеством** множества *M* и обозначают

$K \subset M$.

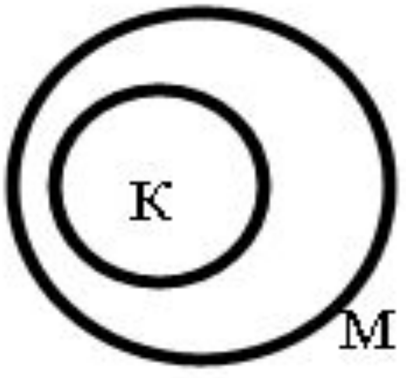

Рис. 1.1.

Множество *K* называется **подмножеством** множества *M* ($K \subset M$), если для любого $x \in K$ выполняется $x \in M$.

Универсальным называется множество *U*, состоящее из всех возможных элементов, обладающих данным признаком.

Если множество не содержит элементов, обладающих данным признаком, то оно называется **пустым** и обозначается $\varnothing$.

Равными называют два множества *A* и *B*, состоящие из одинаковых элементов: .$A = B$

Число элементов множества *A* называется **мощностью** множества и обозначается $|A|$ или $n(A)$.

Множество, элементами которого являются подмножества множества *M*, называется *семейством множества* *M* или *булеаном* этого множества и обозначается *B(M).*

Мощность булеана множества *M* *вычисляется по формуле*

, $$|B(M)| = 2^n$$

где *n – это мощность множества M.*

<u>*Пример*</u>. $M = \{y, x, a\}, n = 3, |B(M)| = 2^3 = 8,$

$$B(M) = \{\varnothing, \{y\}, \{x\}, \{a\}, \{y, x\}, \{x, a\}, \{y, a\}, \{y, x, a\}\}.$$

Множество считается **заданным**, если *перечислены* все его элементы, или *указано свойство*, которым обладают те и только те элементы, которые принадлежат данному множеству. Само свойство называется **характеристическим**.

В качестве характеристического свойства может выступать указанная для этого свойства *порождающая процедура*, которая описывает способ получения элементов нового множества из уже полученных элементов или из других объектов.

Примеры задания множества

Множество всех чисел, являющихся неотрицательными степенями числа 2 можно задать:

а) перечислением элементов: $M_{2^n} = \{1,2,4,8,16,32,\ldots\}$;

б) указанием характеристического свойства:

; $M_{2^n} = \{2^i \mid i \in Z, i \geq 0\}$

в) с помощью порождающей процедуры по *индуктивным* правилам:

; $1 \in M_{2^n}$

если , то $k \in M_{2^n}$. $(2k) \in M_{2^n}$

1.2. Основные операции над множествами

Суммой или *объединением* двух множеств *X* и *Y* называется множество, состоящее из элементов, входящих или во множество *X*, или во множество *Y*, а может в оба множества одновременно (рис. 1.2). Обозначение: $Z = X \cup Y$.

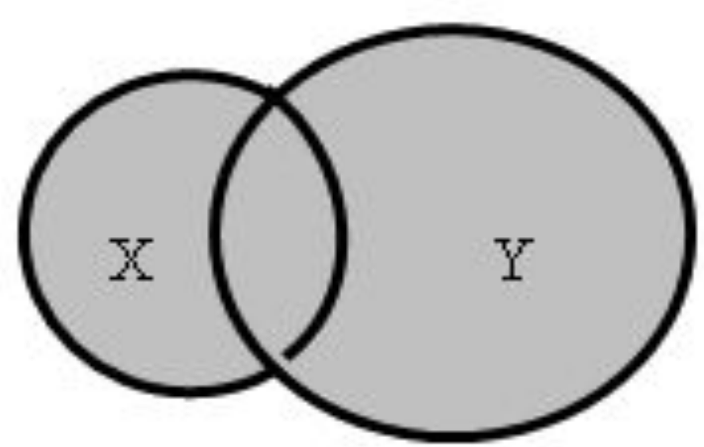

Рис. 1.2

Пересечением множеств X и Y называется множество, состоящее из элементов, входящих одновременно и во множество X, и во множество Y (рис. 1.3). Обозначение: $Z = X \cap Y$.

Разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее все элементы множества X, не содержащиеся в Y (рис. 1.4); эта разность обозначается $Z = X \setminus Y$.

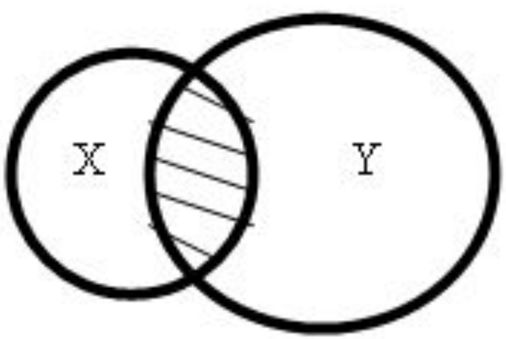

Рис. 1.3

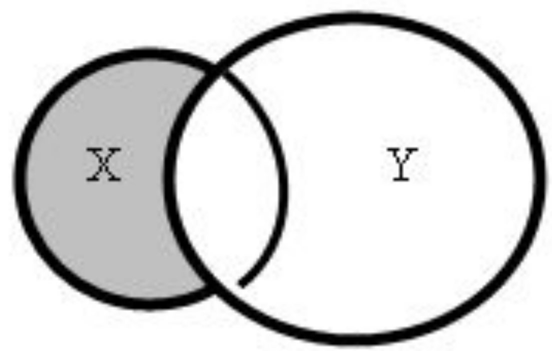

Рис. 1.4

Дополнением $\overline{X}$ множества X до универсального множества *U* (*рис. 1.6*) является множество

$$\overline{X} = \{x_i \mid x_i \notin X, x_i \in U\}.$$

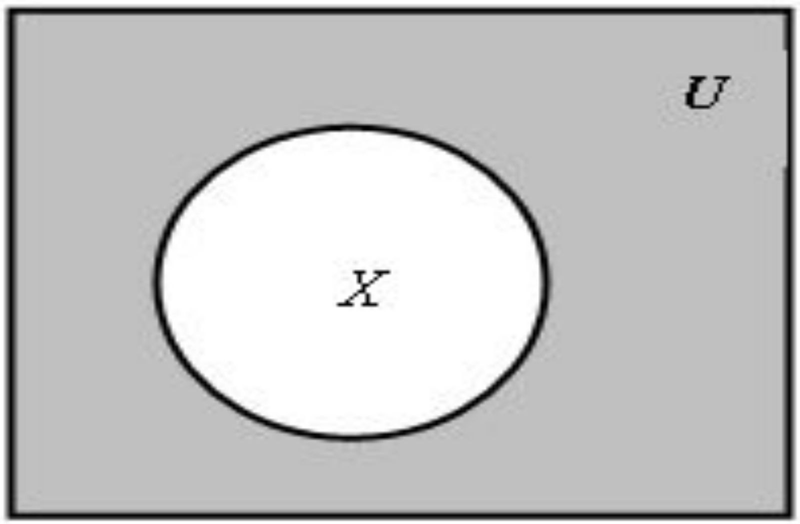

Рис. 1.5

Симметрической разностью множеств X и Y называется множество Z, содержащее либо элементы множества X, либо элементы множества Y, но не те и другие одновременно (*рис. 1.6*); эта разность обозначается $X \dot{\setminus} Y$.

$$= X \dot{\setminus} Y \quad (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$$

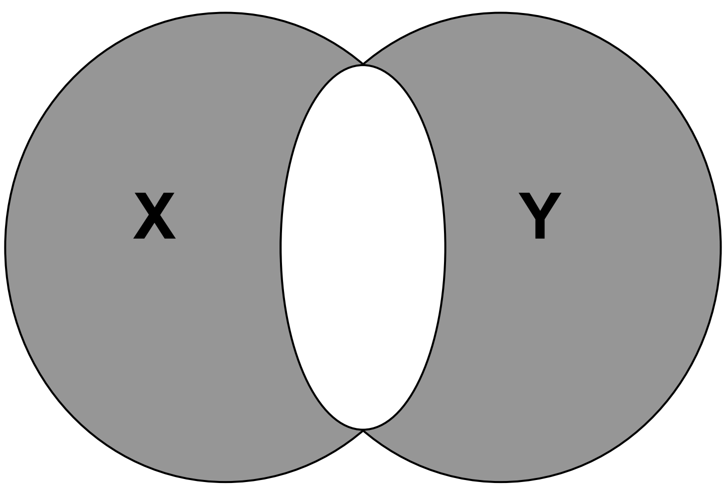

Рис. 1.6.

Вместо выражения

«любое *x* из множества X»

можно писать $\forall x \in X$, где перевёрнутая латинская буква А взята от начала английского слова **Any** – любой.

Вместо выражения

«существует элемент *x* из множества X»

кратко пишут: $\exists x \in X$, где перевёрнутая латинская буква Е является начальной в английском слове **Existence** – существование.

Множество A можно **разбить на классы** (непересекающиеся подмножества) A_i, если:

- объединение всех подмножеств совпадает с множеством A: $A = \bigcup_i A_i$;
- пересечение любых двух различных подмножеств пусто, т.е. для любых $i \neq j$ выполняется $A_i \cap A_j = \varnothing$

Для операций над множествами справедливы следующие тождества:

- *законы коммутативности объединения и пересечения*

$$X \cup Y = Y \cup X, \qquad X \cap Y = Y \cap X,$$

- *законы ассоциативности объединения и пересечения*

$$(X \cup Y) \cup Z = Y \cup (X \cup Z),$$

$$(X \cap Y) \cap Z = Y \cap (X \cap Z),$$

- законы дистрибутивности пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z),$$

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z);$$

- законы поглощения

$$X \cup (X \cap Y) = X, \qquad X \cap (X \cup Y) = X;$$

- законы склеивания

$$(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) = X, \qquad (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X;$$

- законы Порецкого

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) = X \cup Y, \qquad X \cap (\overline{X} \cup Y) = X \cap Y;$$

Операция $\cap$ имеет преимущество перед операцией $\cup$. Скобки - для наглядности.

- *законы идемпотентности объединения и пересечения* $X \cup X = X, \quad X \cap X = X;$
- *законы действия с универсальным (U) и пустым ($\varnothing$) множествами*

$$X \cup \varnothing = X, \qquad X \cap \varnothing = \varnothing,$$

$$X \cup U = U, \qquad X \cap U = X,$$

$$X \cup \overline{X} = U, \qquad X \cap \overline{X} = \varnothing;$$

- *законы де Моргана*

$$\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}, \qquad \overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y};$$

- *закон двойного дополнения*

$$\overline{\overline{X}} = X.$$