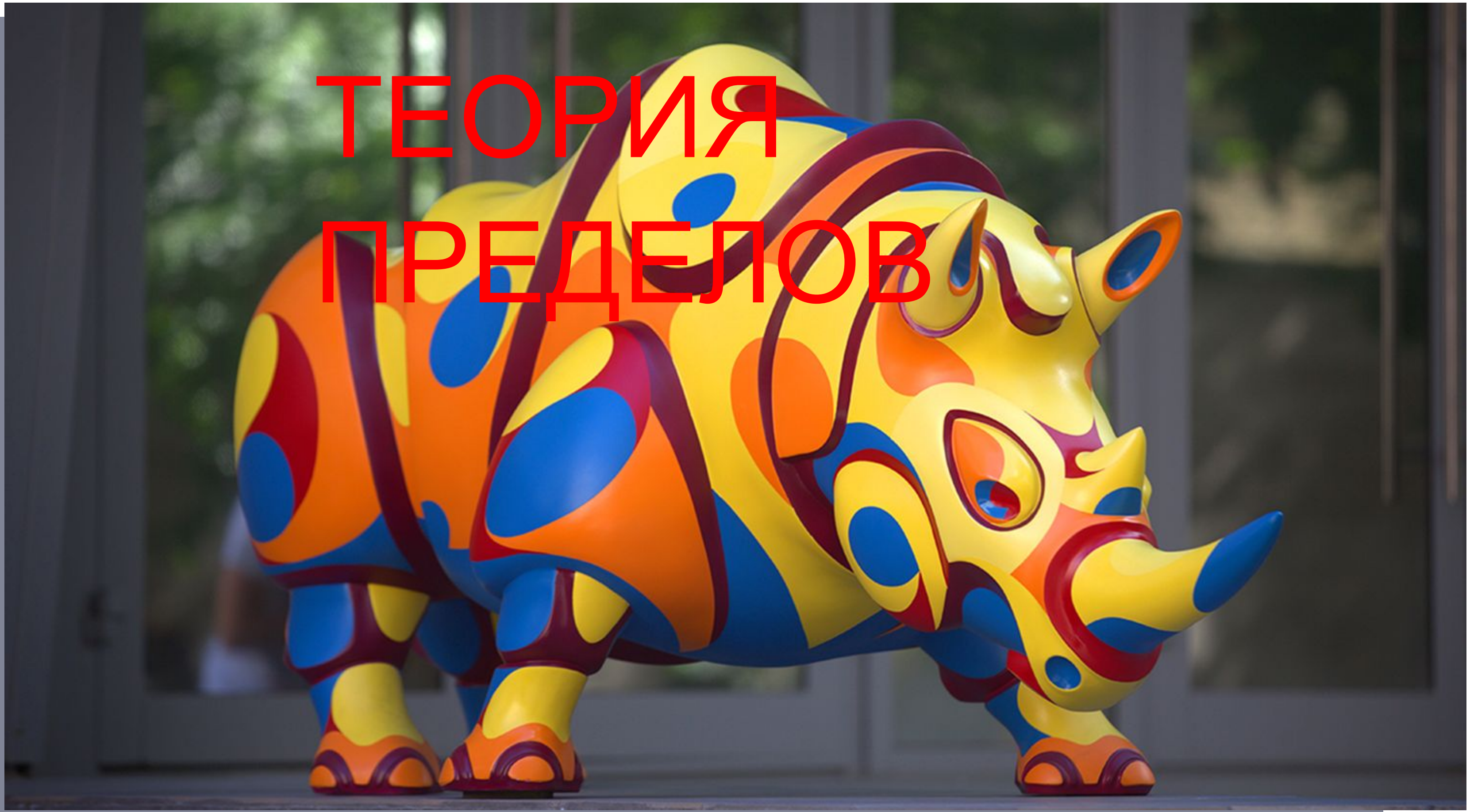
УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ | БОЛЬШЕ ЧЕМ ОБРАЗОВАНИЕ

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ



УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

ТЕМА 5: ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

Вопросы:

1. Понятие функции. Свойства функций. Виды функций.
2. Понятие предела. Предел функции.
3. Свойства бесконечно-больших и бесконечно-малых величин.
4. Теоремы о пределах.
5. Решенце пределов

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

1. ***Понятие функции. Свойства функций. Виды функций.***

Вспомним понятие функции:

Если дано некоторое множество X и указан некоторый закон (правило), обозначаемый буквой f, по которому каждому значению величины x из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция вида f(x) . При этом x называется независимой переменной (или аргументом), y – зависимой переменной.

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Множество X называют областью определения (или существования) функции и обозначают D(x) , а множество Y обозначают и называют областью значений функции и обозначают E(x) .

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Если множество X специально не оговорено, то под областью определения функции подразумевается область допустимых значений независимой переменной x, то есть множество таких значений x, при которых функция вообще имеет смысл (отсутствует деление на нуль, отрицательное число под знаком радикала и т.д.).

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Найти область определения функций:

1. $y = x^2 - 2x + 5.$ Областью определения функции является множество (–∞; +∞).

2. $$y = \frac{4}{3x-1}.$$

При любом действительном значении x функция y принимает действительные значения, кроме тех значений x, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е., когда 3x – 1 = 0. Найдем это значение:

$$3x - 1 = 0; \quad 3x = 1; \quad x = \frac{1}{3}.$$

Областью определения функции является множество

$$x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right).$$

Свойства функций:

1. Четность и нечетность.

Функция называется четной, если для любых значений x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$ и нечетной, если $f(-x)=-f(x)$.

В противном случае функция называется функцией общего вида.

Например, функция $y=x^2$ является четной, так как $(-x)^2=x^2$ или: $f(-x)=f(x)$, а функция $y=x^3$ – нечетной,

так как $(-x)^3=-x^3$ или $f(-x)=-f(x)$

2. Монотонность.

Функция называется возрастающей (убывающей) на множестве X, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции,

т.е. из неравенства $x_2 > x_1 \left(x_2 < x_1 \right)$

следует неравенство $f\left(x_2\right) > f\left(x_1\right) f\left(x_2\right) < f\left(x_1\right)$

Функции возрастающие или убывающие называются **монотонными** функциями.

Так, например, функция $y = x^2$ (см. рис. 1.7) при $x \in (-\infty;\ 0)$ убывает и при $x \in (0;\ +\infty)$ возрастает

3. Ограниченность

Ограниченность. Функция $f(x)$ называется **ограниченной** на промежутке ***X***, если существует такое положительное число *M*, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$. В противном случае функция называется **неограниченной**.

Например, функция $y = sin\,x$ ограничена на всей числовой оси, ибо $|sin\,x| \leq 1$ для любого $x \in R$.

4. **Периодичность.** Функция $y = f(x)$ называется **периодической**, если существует такое число $\tau > 0$, что для всех x и $x + \tau$ из области определения выполняется равенство $f(x+\tau) = f(x)$. Наименьшее число T их всех таких чисел τ называется периодом функции $y = f(x)$.

Например, период функции $y = \cos x$ равен 2π $(T = 2\pi)$, так как для любых x области определения этой функции выполняется равенство $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

Число 2π, для которого выполняется это равенство, является наименьшим. Возьмем фиксированную точку $x = 0$. Найдем значение $\cos x$ в этой точке: $\cos 0 = 1$. Это значение, равное 1, $\cos x$ может повторить только через 2π радиан. Следовательно, $\cos x$ не может иметь периода, меньшего 2π

Элементарные функции. Классификация функций

Если функция задана аналитическим уравнением $y = f(x)$, связывающим переменные ***x***, ***y***, то есть разрешенным относительно ***y***, то такое задание функции называется **явным**.

Примерами явного задания функции являются:

$y = x^2$; $y = sin^3 x$.

Если функция задана уравнением вида $F(x;y) = 0$, связывающим переменные ***x***, и ***y***, при этом не разрешенным относительно ***y***, то такое задание функции называется **неявным**.

Примеры неявно заданных функций:

1) $x^2 + y - 9 = 0$, 2) $e^{xy} + sin\, y - 2x = 0$.

Обратная функция. Пусть дана функция $y=f(x)$ с областью определения X и областью значений Y. Если каждому $y \in Y$ соответствует только одно значение $x \in X$, то на множестве Y определена функция $x=\varphi(y)$, называемая **обратной** к функции $f(x)$. Символически обратную функцию $x=\varphi(y)$, обозначают еще так: $x=f^{-1}(y)$. Функции $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ называются взаимно обратными.

Отметим, что графики взаимно обратных функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ одинаковы. Однако если в обратной функции $x=\varphi(y)$ обозначения функции x и аргумента y изменить соответственно на y и x, то графики функций $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Элементарные функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции:

a) постоянная функция $y = c, c \in R$;

b) степенная функция $y = x^{\alpha}, \alpha \in R$;

c) показательная функция; $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$

d) Логарифмическая функция $y = log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$;

e) тригонометрические функции $y = sin\, x,\ y = cos\, x,\ y = tgx,\ y = ctgx$;

f) обратные тригонометрические функции $y = arcsin\, x,\ y = arccos\, x,\ y = arctgx,\ y = arcctgx$.

Классификация функций. Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

– **целая рациональная функция- многочлен-** $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ **;**

– дробно-рациональная функция – отношение двух многочленов;

– иррациональная функция.

Всякая неалгебраическая функция называется **трансцендентной.** К таким функциям относятся функции: показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические.

Определение предела функции.

Определение. Пусть для произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех x удовлетворяющих соотношению $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$|f(x)-A| < \varepsilon$. Тогда число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a и записывается как $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$

Символ lim от латинского слова «предел» (limes).
Точка а называется предельной точкой.
$x\to a$ читают: *x стремиться к a*

2. Бесконечно малая и бесконечно большая величины.

Среди множества переменных величин особое место занимают переменные величины, пределы которых равны нулю или бесконечности. К изучению этих переменных мы и перейдем.

Переменная величина ***x*** называется бесконечно малой величиной (б.м.в.), если она имеет своим пределом число нуль (б/м): $\lim x=0$

Свойства бесконечно малых величин

1. Теорема 1. Алгебраическая сумма конечного числа б.м.в. есть величина бесконечно малая (б.м.в)

Под алгебраической суммой понимается сумма или разность выражений.

2. Теорема 2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную переменную величину есть величина бесконечно малая (б.м.в).

Следствие 1. Произведение бесконечно малой величины на постоянную величину есть величина бесконечно малая.

Действительно, так как любая постоянная величина есть величина ограниченная, то по теореме 2 справедливо указанное следствие.

Следствие 2. Произведение любого числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

Теорема. Если α – **б.м.в.**, а переменная x имеет предел, отличный от нуля, то $\dfrac{\alpha}{x}$ – **б.м.в.**, т.е. частное от деления б.м.в. на переменную, имеющую предел, отличный от нуля, есть б.м.в.

Обратное тоже верно.

Бесконечно большие величины и их связь с бесконечно малыми величинами

Переменная величина x называется бесконечно большой величиной (б.б.в. Или б/б), если для любого наперед заданного сколь угодно большого числа   найдется такое значение переменной x, начиная с которого для всех остальных ее значений $m > 0$ выполняется неравенство |x|>M .

Символически этот факт записывается так:

lim x=± ∞ . (б/б)

Очевидно, при $x \to \pm\infty$ переменные $x^2, x^3, \ldots, x^n$, а также их суммы, будут = б.б.в.(б/б)

Связь между б/б и б/м

Теорема. Если α – б.м.в, а переменная х – б.б.в., то

1) $\frac{1}{x}$ – б.м.в.; или $\frac{⊠}{б.б.в.}$ = *б.м.в.* или $\frac{⊠}{\infty}$ = ⊠

2) $\frac{1}{\alpha}$ – б.б.в.; или $\frac{⊠}{б.м.в.}$ = *б.б.в.*, или $\frac{⊠}{⊠} = \infty$

3) $\frac{\alpha}{x}$ – б.м.в. или $0/\infty=0$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Если переменная величина x имеет предел, равный действительному числу α, то начиная с некоторого значения x для всех остальных значений этой переменной будет выполняться равенство:

$x = a + \alpha$

где ∞ – б.м.в. Обратное тоже верно.

Условимся впредь под ε понимать наперед заданное сколь угодно малое положительное число.

Теорема 2. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин, имеющих конечный предел, равен алгебраической сумме пределов слагаемых величин, т.е.

Предел суммы=сумме пределов

$$\lim(x+y-z)=\lim x+\lim y-\lim z$$

Теорема 3. Предел произведения конечного числа переменных величин, имеющих предел, равен произведению пределов этих величин, т.е. из существования конечных пределов $\lim x=a,\ \lim y=b$ переменных x и y следует равенство

Предел произведения=произведению пределов.

$$\lim(x\cdot y)=\lim x\cdot\lim y$$

1. Теория пределов

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, если предел существует: $\lim(c \cdot y) = c \cdot \lim y$, т.к. $\lim c = c$.

Следствие 2.

Предел элементарной функции=элементарной функции предела

Предел степени переменной, имеющей предел, равен той же степени от предела переменной, т.е.

$$\lim x^k = (\lim x)^k$$

Следствие 3. Предел корня n-ой степени от переменной, имеющей предел, равен корню n-ой степени от предела этой переменной, т.е.

$$\lim \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\lim x}$$

Теорема 4. Предел частного двух переменных величин равен отношению предела числителя на предел знаменателя, если эти пределы существуют и предел знаменателя отличен от нуля, т.е.

$$\lim\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\lim x}{\lim y}=\frac{a}{b}$$, если $\lim x=a, \lim y=b\neq 0$.

Следствие 1. Если $x=c=const$, то $\lim\left(\frac{c}{y}\right)=\frac{c}{\lim y}$, если $\lim y$ существует и отличен от нуля.

Следствие 2. Если $y=c=const$, то $\lim\left(\frac{x}{c}\right)=\frac{\lim x}{c}$, если $\lim x$ существует и $c\neq 0$.

Типовые примеры отыскания пределов переменных величин.

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}$$

Чтобы решить такой пример, подставим значение *x=3* в функцию. Получим:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-3x-5}{1+x}=\lim_{x\to 3}\frac{18-9-5}{4}=1$$

1 тип. Предел функции, если она существует в пределеной точке **а**, равен значению этой функции в точке **а**.

Итак, первое правило: **Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию**.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

Пример с бесконечностью:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x\to\infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $1-x$?

$1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x\to\infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

Еще один пример с бесконечностью:

$$\lim_{x \to \infty} (x^2 - 2x - 3)$$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности и смотрим на поведение функции:

$$\text{если} \quad x = 10, \text{ то } 10^2 - 2 \cdot 10 - 3 = 77$$

$$\text{если} \quad x = 100, \text{ то } 100^2 - 2 \cdot 100 - 3 = 9797$$

$$\text{если} \quad x = 1000, \text{ то } 1000^2 - 2 \cdot 1000 - 3 = 997997$$

...

Вывод: при $x \to \infty$ функция $x^2 - 2x - 3$ неограниченно возрастает:

1. Теория пределов

2 тип переделов. Требуются алгебраические преобразования (разложение на множители)

2. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$.

○ 1) Здесь предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=4\cdot 2-8=0$. Следовательно, теорему о пределе частного применить нельзя. Так как $\lim\limits_{x\to 2}(4x-8)=0$, то $4x-8$ при $x\to 2$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x-8}$ — бесконечно большая. Поэтому при $x\to 2$ произведение $\dfrac{1}{4x-8}\cdot 5$ есть величина бесконечно большая, т. е. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x-8}=\infty$.

1. Теория пределов

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\dots}{4x-8}=\infty.$

2) Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Непосредственной подстановкой вместо аргумента его предельного значения вычислить предел нельзя, так как при $x\to 0$ получается отношение двух бесконечно малых величин.

Разложим числитель и знаменатель на множители, чтобы сократить дробь на общий множитель, стремящийся к нулю, и, следовательно, сделать возможным применение теоремы 3. Нужно иметь в виду, что здесь не производится сокращение на нуль, что недопустимо. По определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению, никогда не принимая этого значения; поэтому до перехода к пределу можно произвести сокращение на множитель, стремящийся к нулю. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(3x-2)}{x(2x-5)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{2}{5}.$$

3) Пределы числителя и знаменателя при $x\to 3$ равны нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+6)=3^2-5\cdot 3+6=0$, $\lim\limits_{x\to 3}(3x^2-9x)=3\cdot 3^2-9\cdot 3=0$. Разложим квадратный трехчлен в числителе на линейные множители по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена. Разложив на множители и знаменатель, сократим дробь на $x-3$. Используя следствие 4, получим

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{3x(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{3x}=\frac{3-2}{3\cdot 3}=\frac{1}{9}.$$

3 тип переделов. Х→∞. Выбираем х с наибольшим показателем.

Делим числитель и знаменатель на Х с наибольшим показателем

4. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3-6x^2+5x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{4x+1}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-4x})$.

○ 1) Первые три слагаемых при $x\to\infty$ пределов не имеют, поэтому следствием 3 непосредственно воспользоваться нельзя. Вынося x^3 за скобки, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^3\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=(\lim_{x\to\infty}x)^3\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$$

(при $x\to\infty$ величины $6/x$, $5/x^2$ и $1/x^3$ — бесконечно малые и их пределы равны нулю).

2) При $x\to\infty$ знаменатель $4x+1$ неограниченно растет, т. е. является величиной бесконечно большой, а обратная величина $\dfrac{1}{4x+1}$ — бесконечно малой. Произведение $\dfrac{1}{4x+1}\cdot 5$ бесконечно малой на ограниченную величину (постоянная — частный случай ограниченной величины) есть величина бесконечно малая, и предел ее при $x\to\infty$ равен нулю. Следовательно,

$\lim \dfrac{5}{\ldots}=0$

1. Теория пределов

3) При $x \to \infty$ числитель и знаменатель — величины бесконечно большие. Поэтому при непосредственном применении теоремы 3 получаем выражение ∞/∞, которое представляет собой неопределенность. Для вычисления предела этой функции нужно числитель и знаменатель разделить на x:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2+3/x}{5+1/x} = \frac{2+0}{5+0} = \frac{2}{5}$$

(при $x \to \infty$ слагаемые $3/x$ и $1/x$ — величины бесконечно малые и, следовательно, их пределы равны нулю).

1. Теория пределов

4) Разделим числитель и знаменатель на наивысшую степень аргумента в знаменателе, т. е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2/x+3/x^3}{3-5/x^3}.$$

При $x\to\infty$ имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)=\infty \text{ и } \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{5}{x^3}\right)=3.$$

Так как знаменатель есть величина ограниченная, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}=\infty.$$

4 тип переделов. Пределы с корнями (радикалами).

Числа *а+в* и *а-в* называются сопряженными

Формула: *(а+в) · (а-в) =а*^{2}*- в*^{2}.

Числитель и знаменатель умножают на сопряженный множитель

3. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

○ 1) Пределы числителя и знаменателя при $x\to a$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+$ $+\sqrt{5+x}$ и затем сократив дробь на x, получим

1. Теория пределов

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

1. Теория пределов

5 тип переделов. 1-й замечательный предел.

Формула: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ или $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1.$

247. 1) $\lim\limits_{x \to -\pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{1 + \sin^3 x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{3x}$; 3) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin^3 2z}{z^3}$; 4) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 3x}{x}$.

1. Теория пределов

○ 1) Очевидно, что при $x \to -\pi/2$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю. Разложив числитель и знаменатель на множители и сократив дробь на $1+\sin x$, получим

$$\lim_{x\to-\pi/2}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\lim_{x\to-\pi/2}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)}=$$

$$=\lim_{x\to-\pi/2}\frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x}=\frac{1-\sin(-\pi/2)}{1-\sin(-\pi/2)+\sin^2(-\pi/2)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

2) Преобразуя заданное выражение и используя соотношение (9.71), получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 3x}=\lim_{x\to0}\frac{4\sin 4x}{3\cdot 4x}=\frac{4}{3}\lim_{4x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}.$$

3) $$\lim_{z\to0}\frac{\sin^3 2z}{z^3}=\lim_{z\to0}\left(\frac{\sin 2z}{z}\right)^3=8\left(\lim_{2z\to0}\frac{\sin 2z}{2z}\right)^3=8\cdot 1=8.$$

1. Теория пределов

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^3 x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\sin x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\sin x\right)=\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\times$

$\times\lim\limits_{x\to 0}\sin x=1^2\cdot 0=0.$

5) Преобразовав разность косинусов в произведение, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\sin x}{x}=4\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\sin x=4\cdot 1\cdot 0=0.$$ ●

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

143. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$ (k — постоянная величина).

Решение. Произведем подстановку $kx=y$. Отсюда следует, что $y\to 0$ при $x\to 0$, а $x=y/k$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y/k}=\lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y}=k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=k,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

144. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin kx}{x}}{\dfrac{\sin lx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin lx}{x}}=\frac{k}{l}.$$

Здесь мы разделили числитель и знаменатель дроби на x (это можно сделать, так как $x\to 0$, но $x\neq 0$), а затем воспользовались результатом предыдущего примера.

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

145. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3x}=\frac{0}{0}=(*)$$

Используем первый замечательный предел $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

$$(*)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{3\cdot\frac{1}{7}\cdot 7x}=\frac{1}{\frac{3}{7}}=\frac{7}{3}$$

147. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение. Заменив $\operatorname{tg}x$ на $\sin x/\cos x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos x}=1\cdot 3=3.$$

148 Найти предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}$

Используем формулу: $1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 2x}{5x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\sin 2x}{\frac{1}{2}\cdot 2x}=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\cdot 2\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{\to 0}=\frac{4}{5}\cdot 0=0$$

1. Теория пределов

146. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. I способ. Здесь имеет место неопределенно вида 0/0. Применяя известную тригонометрическую формулу и вып няя элементарные преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}.$$

II способ. Преобразуем числитель следующим образом:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

1. Теория пределов

6 тип переделов.   2-й замечательный предел.

Второй замечательный предел

В теории математического анализа доказано, что:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha} = e$$

Данный факт носит название **второго замечательного предела**.

Справка: $e = 2{,}718281828\ldots$ *– это иррациональное число.*

В качестве параметра α может выступать не только переменная x, но и сложная функция. **Важно лишь, чтобы она стремилась к бесконечности**.

1. Теория пределов

Пример 6

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

Когда выражение под знаком предела находится в степени – это первый признак того, что нужно попытаться применить второй замечательный предел.

Пример

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right)^{\frac{1}{3x}\cdot 4x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x}{3x}}=e^{\frac{4}{3}}$$

е (2-ой замечательный предел)

1. Теория пределов

Пример 7

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}$

Внимание! Предел подобного типа встречается очень часто, пожалуйста, очень внимательно изучите данный пример.

Пробуем подставить бесконечно большое число в выражение, стоящее под знаком предела:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

1. Теория пределов

УНИВЕРСИТЕТ СИНЕРГИЯ

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$$

В результате получена неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}$. Но второй замечательный предел применим к неопределенности вида 1^{∞}. Что делать? Нужно преобразовать основание степени. Рассуждаем так: в знаменателе у нас $x+1$, значит, в числителе тоже нужно организовать $x+1$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

Теперь можно почленно разделить числитель на знаменатель:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}$$

1. Теория пределов

Вроде бы основание стало напоминать $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, но у нас знак «минус» да и тройка какая-то вместо единицы. Поможет следующее ухищрение, **делаем дробь трехэтажной**:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3}=1^{\infty}$$

Таким образом, основание приняло вид $\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$, и, более того, появилась нужная нам неопределенность 1^{∞}. Организуем второй замечательный предел $\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$.

1. Теория пределов

Легко заметить, что в данном примере $\alpha = \frac{x+1}{-3}$. Снова исполняем наш искусственный прием: возводим основание степени в $\frac{x+1}{-3}$, и, чтобы выражение не изменилось – возводим в обратную дробь $\frac{-3}{x+1}$:

1. Теория пределов

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2x+3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1-3}{x+1}\right)^{2x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x+1}\right)^{2x+3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{2x+3} = 1^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x+1}{-3}\right)}\right)^{\frac{x+1}{-3}}\right)^{\frac{-3}{x+1}\cdot(2x+3)} = e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x+1}} = e^{\frac{\infty}{\infty}} =$$

$$= e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x+1}{x}}} = e^{-3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}}{1+\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}} = e^{-3\cdot 2} = e^{-6}$$

1. Теория пределов

Вычислите пределы:

5. 1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+x-5)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}(x^3-x^2+1)$.

6. 1) $\lim\limits_{x\to -1}(2x^3-5x^2+x-4)$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}(3x^3+x^2-8x+10)$.

7. 1) $\lim\limits_{x\to 1}[(7x+2)(4x-3)(5x+1)]$; 2) $\lim\limits_{x\to 2}[(x^2-1)(x-3)(x-5)]$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}[(2x-4)(x-1)(x+2)]$.

8. 1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

9. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3}{2x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$.

10. 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3-2x^2}{5x^3-4x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$.

11. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 2) $\lim\limits_{x\to -3/2}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$.

12. 1) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

13. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$.

14. 1) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{3x^2+7x-6}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2/3}\dfrac{3x^2+5x+2}{3x^2+8x+4}$.

1. Теория пределов

15. 1) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

16. 1) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{3-\sqrt{x}}{4-\sqrt{2x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

17. 1) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{6}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}\right)$; 2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{3}{x^3+1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

18. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-5x+6)$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+3x^2)$.

19. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2+3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{x^2}\right)$.

20. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x-2}$.

1. Теория пределов

21. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^3+4x^2+2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-x^2}{x^3+3x^2-1}$.

22. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^6}{x^3+x^4}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

1. Теория пределов

Найти пределы: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 10x}{x}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x},$$

$$\lim_{x \to 0} \left(1 - \frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{5x}}; \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tg^2 13x}{4x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin 3x}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{tg 5x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x}, \qquad \lim_{x \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{x}$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{2}{x}}, \qquad \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^{x}$$