ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Задача Коши – задача с начальными данными:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(t,x) \\ u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x) \\ u_t(t,x)|_{t=0} = \varphi_1(x) \end{cases} \qquad (1)$$

Бесконечная струна (балка), $u(t,x)$ – величина отклонения от положения равновесия

$f(t,x)$ – плотность внешних сил;

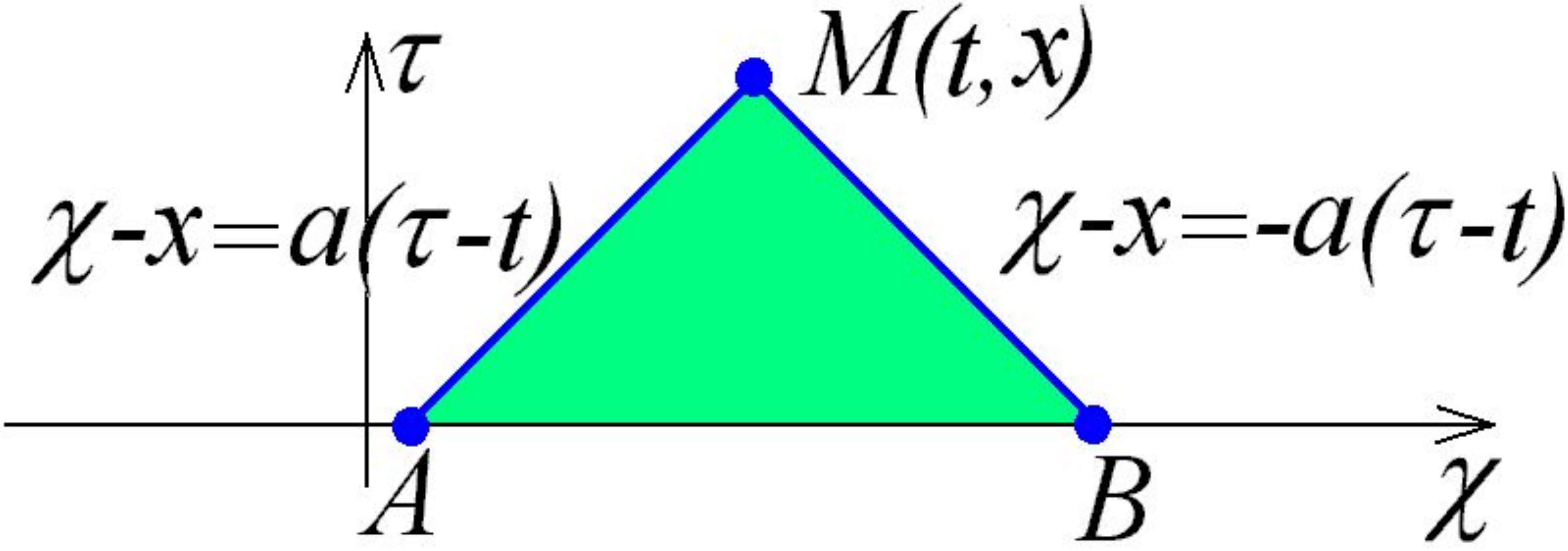
$\varphi_0(x)$ – начальное отклонение от положения равновесия;

$\varphi_1(x)$ – начальная скорость движения.

Теорема. *Если функции $f(t,x)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$– «хорошие», то задача Коши (1) поставлена корректно, т.е. у нее существует единственное решение, которое при «малых» изменениях входных данных задачи изменяется «не сильно».*

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \varphi_1(\xi)\,d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\iint\limits_{\Delta AMB} f(\tau,\chi)\,d\tau\,d\chi \quad - \textbf{формула Даламбера}$$



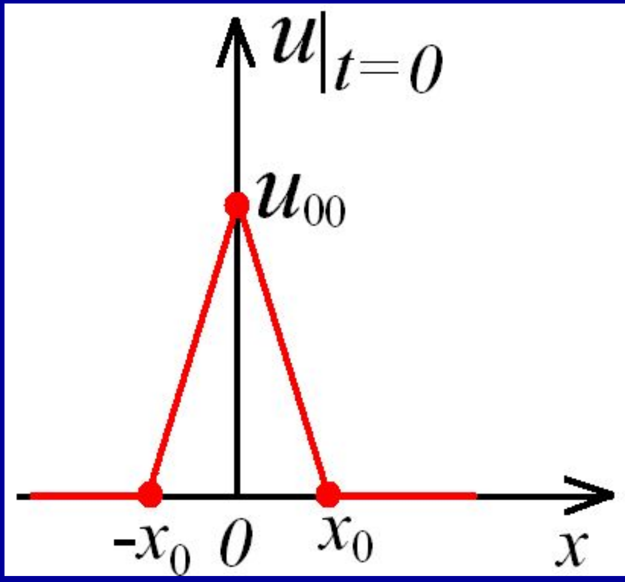
Частный случай: $f(t,x) \equiv \varphi_1(x) \equiv 0$

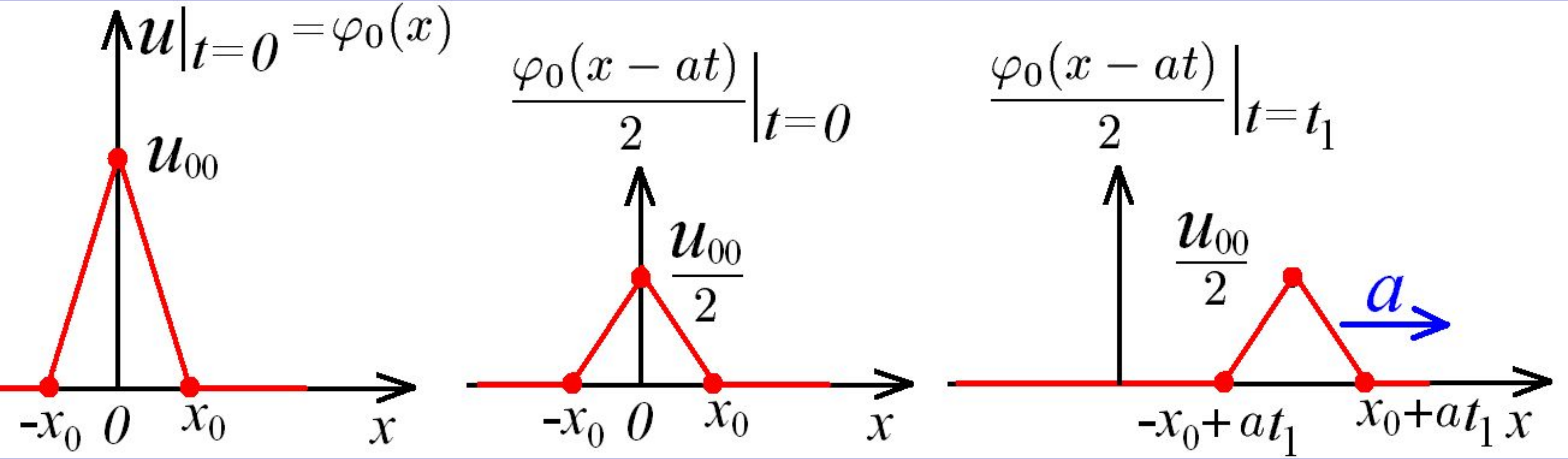
т.е. внешней силы нет, начальная скорость равна нулю, из положения равновесия струна (балка) выведена за счет начального положения.

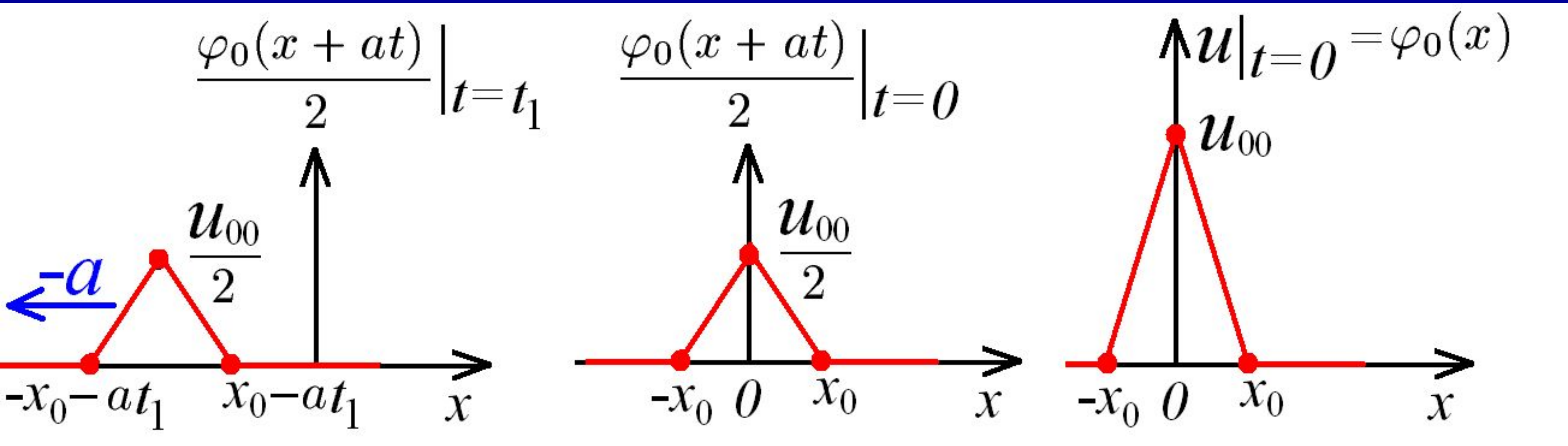
$$\boxed{u(t,x) = \frac{\varphi_0(x-at) + \varphi_0(x+at)}{2}}$$

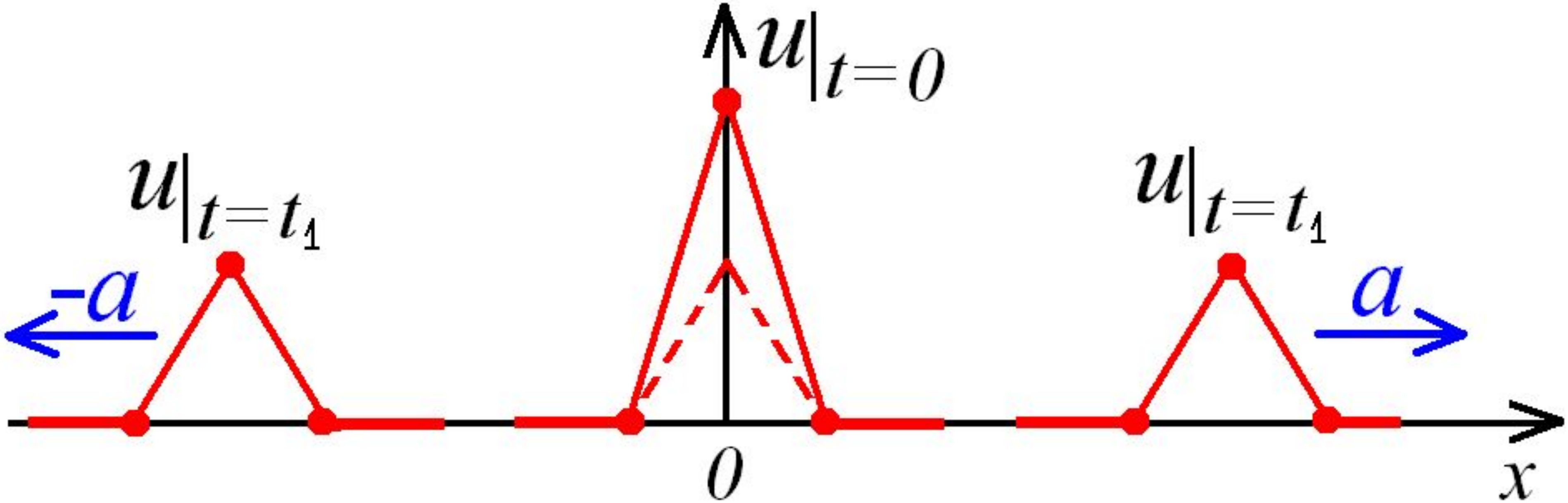
Пусть

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & x < -x_0; \\ \frac{u_{00}}{x_0}(x + x_0), & -x_0 \le x \le 0; \\ -\frac{u_{00}}{x_0}(x - x_0), & 0 \le x \le x_0; \\ 0, & x > x_0. \end{cases}$$

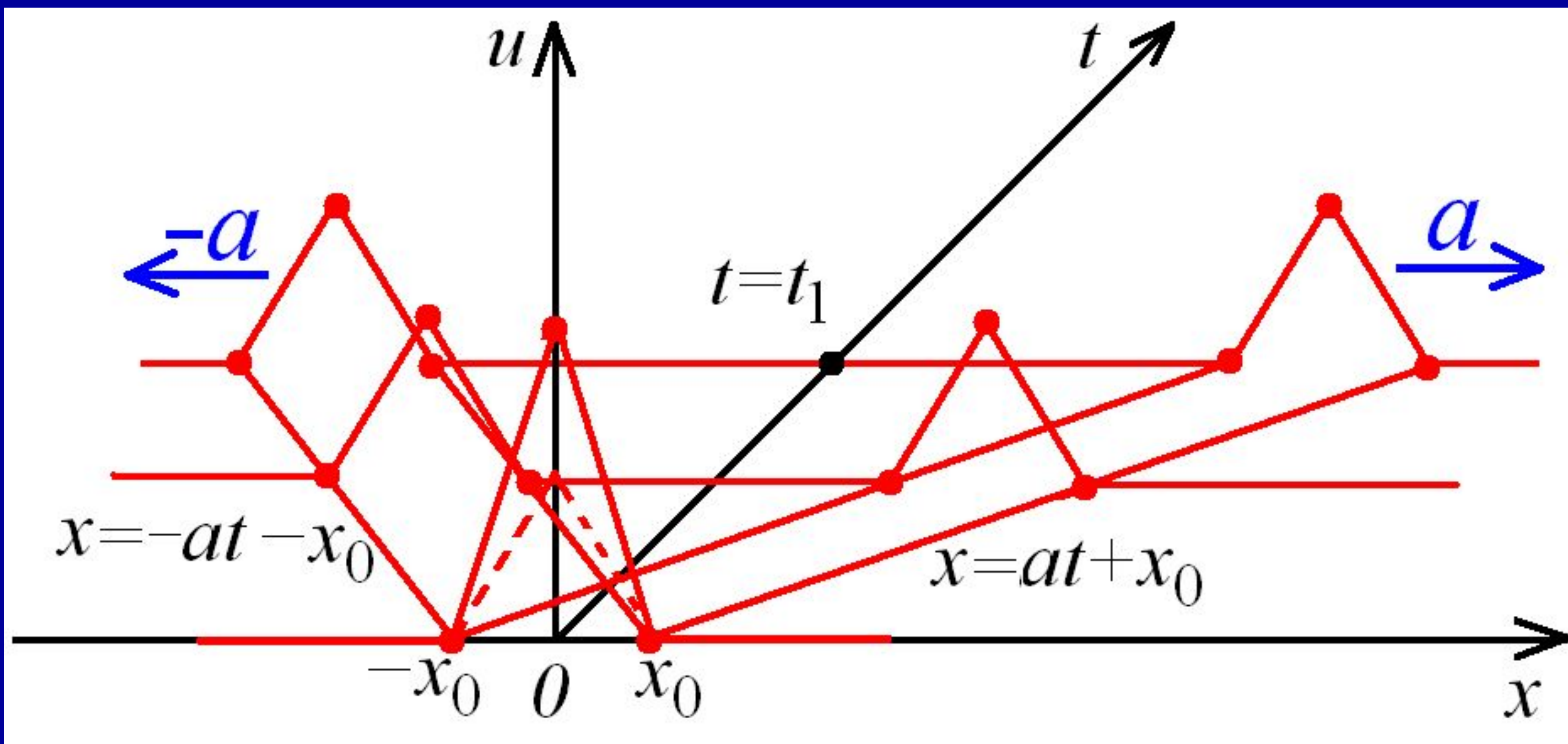



$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x)$
u_{00}
$-x_0$ 0 x_0 x
$\left.\dfrac{\varphi_0(x-at)}{2}\right|_{t=0}$
$\dfrac{u_{00}}{2}$
$-x_0$ 0 x_0 x
$\left.\dfrac{\varphi_0(x-at)}{2}\right|_{t=t_1}$
$\dfrac{u_{00}}{2}$
a
$-x_0+at_1$ x_0+at_1 x


$\left.\dfrac{\varphi_0(x+at)}{2}\right|_{t=t_1}$
$\dfrac{u_{00}}{2}$
$-a$
$-x_0-at_1$ x_0-at_1 x
$\left.\dfrac{\varphi_0(x+at)}{2}\right|_{t=0}$
$\dfrac{u_{00}}{2}$
$-x_0$ 0 x_0 x
$u\big|_{t=0} = \varphi_0(x)$
u_{00}
$-x_0$ 0 x_0 x



$u|_{t=0}$
$u|_{t=t_1}$
$u|_{t=t_1}$
-a
a
0
x



u
t
-a
a
$t=t_1$
$x=-at-x_0$
$x=at+x_0$
$-x_0$
0
x_0
x

Вдоль линий

$$x = \pm at + \mathrm{const}$$

1) распространяются возмущения;

2) непрерывно стыкуются разные решения, например, возмущенное течение и течение с $u = 0$.

Такие линии называются: **характеристики**.

В случае **линейных** уравнений и систем характеристики известны заранее.

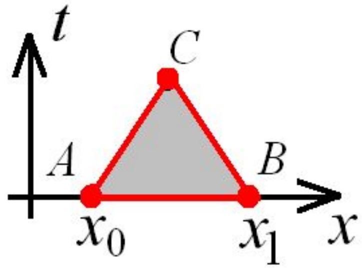
В случае **нелинейных** уравнений и систем характеристики определяются только на заданном решении и в общем случае заранее неизвестны.

Характеристические треугольник и конус

Треугольник ΔABC называется **характеристическим треугольником**.

$$AC: \quad x = at + x_0$$

$$BC: \quad x = -at + x_1$$

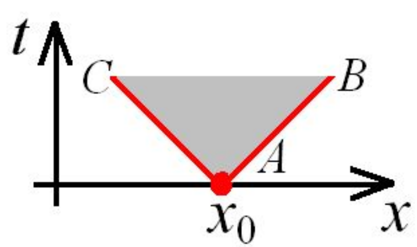


Решение в любой точке характеристического треугольника определяется только начальными данными на отрезке $[x_0, x_1]$. Начальные данными вне отрезка $[x_0, x_1]$ не влияют на решение в ΔABC.

Конус ABC называется **характеристическим конусом** или **конусом влияния**.

$$AB: \quad x = at + x_0$$

$$AC: \quad x = -at + x_0$$



На решение в любой точке конуса ABC влияет значение начального условия в точке A.

Введение характеристики с помощью замены переменных

$$\begin{cases} \tau = t \\ z = x - at + \text{const} \end{cases}$$

При такой замене переменных линия

$$x = at + \text{const}$$

становится новой координатной осью

$$z = 0$$

Якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tau}{\partial t} & \dfrac{\partial \tau}{\partial x} \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} & \dfrac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

следовательно, замена переменных **невырожденная**, **взаимно однозначная**, возможен обратный переход от новых переменных к старым.

Выражение производных по старым переменным через производные по новым переменным с использованием производной сложной функции:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\cdot 1 + \frac{\partial}{\partial z}\cdot(-a) = \boxed{\frac{\partial}{\partial \tau} - a\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \tau}\cdot 0 + \frac{\partial}{\partial z}\cdot 1 = \boxed{\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - a\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - a\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - a\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial z} - a\frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} + a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

$$= \boxed{\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2a\frac{\partial^2}{\partial z \partial \tau} + a^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \boxed{\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}}$$

Волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

в новых переменных становится таким

$$u_{\tau\tau} - 2au_{\tau z} + a^2 u_{zz} = a^2 u_{zz},$$

то есть

$$u_{\tau\tau} - 2au_{\tau z} + (a^2 - a^2)u_{zz} = 0,$$

то есть

$$u_{\tau\tau} - 2au_{\tau z} + \underline{0 \cdot u_{zz}} = 0,$$

$$u_{\tau\tau} - 2au_{\tau z} + 0 \cdot u_{zz} = 0,$$

Равен нулю коэффициент перед старшей производной, выводящей с линии $z = 0$.

Именно этот математический факт и позволяет на этой линии непрерывно состыковать два разных решения.

Линия $z = 0$, то есть линия $x = at + \text{const}$, называется **характеристикой**.

Построение решения задачи Коши в случае аналитических входных данных

Пусть $f(t,x)$, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ являются аналитическими функциями в окрестности точки $(t=0, x=0)$, то есть представимые в виде сходящихся в некоторой окрестности этой точки бесконечных рядов по степеням t:

$$f(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\frac{t^k}{k!};\;\; f_k(x) = \left.\frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k}\right|_{t=0}; \qquad (2)$$

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!};\;\; \varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_1^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} \qquad (3)$$

Решение задачи (1) представляется в виде бесконечного ряда по степеням t

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\frac{t^k}{k!};\;\; u_k(x) = \left.\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right|_{t=0} \qquad (4)$$

с неизвестными коэффициентами $u_k(x)$.

Из начальных условий задачи Коши (1) следует, что коэффициенты

$$u_0(x) = u(t,x)|_{t=0} = \varphi_0(x)$$

$$u_1(x) = \frac{\partial u(t,x)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi_1(x)$$

определяются однозначно как аналитические функции от x.

В уравнении из задачи (1) полагается $t = 0$ и подставляются заданные коэффициенты $u_0(x)$ и $f_0(x)$:

$$u_2(x) = u_{tt}|_{t=0} = \left[a^2 u_{xx} + f(t,x)\right]|_{t=0} =$$

$$= u_{0xx} + f_0(x) = \varphi_0''(x) + f_0(x)$$

коэффициент $u_2(x)$ определился однозначно в виде аналитической функции от x.

Пусть все коэффициенты $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... , $u_{k+1}(x)$ известны в виде аналитических функций от x.

Уравнение из задачи (1) дифференцируется k раз по t, полагается $t = 0$ и подставляются уже найденные коэффициенты:

$$u_{k+2}(x) = a^2 \left. \frac{\partial^k u_{xx}}{\partial t^k} \right|_{t=0} + \left. \frac{\partial^k f(t,x)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = a^2 u_k''(x) + f_k(x).$$

Отсюда следующий коэффициент $u_{k+2}(x)$ определился однозначно как аналитическая функция от x.

Таким образом методом математической индукции доказано, что все коэффициенты ряда (4) определяются однозначно и являются аналитическими функциями от x.

Сходимость ряда (4) следует из **теоремы Ковалевской**.

Теорема Ковалевской. Дана задача Коши для системы уравнений с частными производными

$$\begin{cases} \vec{V}_t = \vec{F}\left(t, x_1, ..., x_n, \vec{V}, \vec{V}_{x_1}, ..., \vec{V}_{x_n}\right), \\ \vec{V}\Big|_{t=0} = \vec{V}_0(x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (5)$$

где $\vec{V} = (v_1, ..., v_m)$ – вектор искомых функций, $\vec{V}_0(x_1, ..., x_n)$ – вектор начальных данных.

В случае аналитичности вектор-функций $\vec{F}$, $\vec{V}_0$ в некоторой окрестности точки $(t = 0, x_1 = 0, ..., x_n = 0)$ у задачи Коши (5) имеется единственное аналитичекское решение, представимое в виде бесконечного ряда

$$\vec{V}(t, x_1, ..., x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{V}_k(x_1, ..., x_n) \frac{t^k}{k!};$$

$$\vec{V}_k(x_1, ..., x_n) = \left.\frac{\partial^k \vec{V}(t, x_1, ..., x_n)}{\partial t^k}\right|_{t=0},$$

сходящегося в некоторой своей окрестности точки

$$(t = 0, x_1 = 0, ..., x_n = 0),$$

сходимость рядов локальная!!

Говорят: **«Теорема Ковалевской – локальная.»**

Пример. Задача Коши для волнового уравнения с $a = 1, f = 0$

$$u_{tt} = u_{xx}\ , \tag{6}$$

и с двумя начальными условиями

$$u(t,x)|_{t=0} = \frac{1}{1-x}\ ,\ \ u_t(t,x)|_{t=0} = \frac{1}{(1-x)^2}\ , \tag{7}$$

имеет единственное решение в виде формального (пока) степенного ряда (4):

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\frac{t^k}{k!}\ ;\ \ u_k(x) = \left.\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right|_{t=0}$$

Коэффициенты этого ряда определяются из соотношения

$$u_{k+2}(x) = u_k''(x) \,, \tag{8}$$

которое получается после дифференцирования волнового уравнения (6) k раз по переменной t и подстановки в полученное соотношение значения $t = 0$.

Методом математической индукции доказываются равенства

$$u_k(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \,, \;\; k = 0, 1, 2, ... \tag{9}$$

При $k = 0, 1$ формула (9) следует из начальных условий (7).

Пусть формула (9) справедлива при номерах $0, 1, \ldots, (k+1)$.
Тогда из равенства (8) следует

$$u_{k+2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right] =$$

$$= \frac{k!(k+1)(k+2)}{(1-x)^{k+3}} = \frac{(k+2)!}{(1-x)^{k+3}}.$$

Следовательно, формула (9) доказана и для следующего номера $(k+2)$.

С помощью признака Даламбера – «последующий член ряда делится на предыдущий» – получается:

$$\frac{(k+1)!}{(1-x)^{(k+2)}}\frac{t^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{k!}{(1-x)^{(k+1)}}\frac{t^k}{k!} = \frac{t}{(1-x)} < 1$$

при малых t и x.

Таким образом доказано, что степенной ряд, решающий задачу Коши (6), (7) для волнового уравнения сходится в некоторой окрестности точки $(t = 0, x = 0)$.

Полученный факт доказан «напрямую», но он есть следствие теоремы Ковалевской, если от задачи (6), (7) перейти к эквивалентной задаче Коши для системы уравнений с частными производными:

$$\begin{cases} v_{1t} = v_2, \\ v_{2t} = v_{3x}, \\ v_{3t} = v_{2x}, \\ v_1\big|_{t=0} = \dfrac{1}{1-x}, \\ v_2\big|_{t=0} = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \\ v_3\big|_{t=0} = \dfrac{1}{(1-x)^2}, \end{cases}$$

где $v_1 = u$, $v_2 = u_t$, $v_3 = u_x$.

Контр-пример С.В. Ковалевской.

Нижеследующая задача Коши для линейного уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}\ , \quad u(x,t)\big|_{t=0} = \frac{1}{1-x} \tag{10}$$

имеет единственное решение в виде формального степенного ряда

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\frac{t^k}{k!}\ ; \quad u_k(x) = \left.\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right|_{t=0}\ ,$$

коэффициенты которого однозначно определяются из рекуррентных соотношений

$$u_{k+1}(x) = u_k''(x)\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Индукцией по k доказываются равенства

$$u_k(x) = \frac{(2k)!}{(1-x)^{2k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Из последнего соотношения с помощью признака Даламбера

$$\frac{[2(k+1)]!}{(1-x)^{2(k+1)+1}} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{(2k)!}{(1-x)^{2k+1}} \frac{t^k}{k!} =$$

$$= \frac{t}{(1-x)^2} \frac{(2k+2)!k!}{(2k)!(k+1)!} = \frac{t}{(1-x)^2} \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)} =$$

$$= \frac{2t}{(1-x)^2}(2k+1) \to \infty \qquad \text{при } k \to +\infty$$

устанавливается расходимость ряда для этой задачи при $t \neq 0$.

Уравнение из задачи (10) не является **уравнением типа Ковалевской**, поскольку порядок производной в левой части этого уравнения меньше, чем порядок производной в правой части уравнения.

Волновое уравнение из задачи (1) имеет тип Ковалевской, поскольку порядок производной в левой части уравнения равен (в общем случае – не меньше, т.е больше или равен) порядку производной в правой части.