

Лекция 4

***Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей.
Позиционные задачи***

Взаимное положение прямой и плоскости, двух плоскостей

Прямая и плоскость:

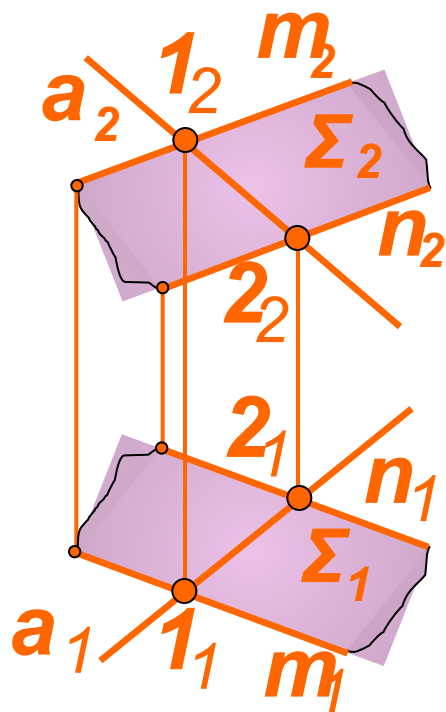
- Прямая **принадлежит** плоскости (см. тема 3): *все точки прямой являются точками плоскости*
- Прямая **параллельна** плоскости: *общих точек нет*
- Прямая **пересекает** плоскость: *одна общая точка*

Две плоскости:

- Плоскости **параллельны**: *общих прямых нет*
- Плоскости **пересекаются**: *одна общая прямая*

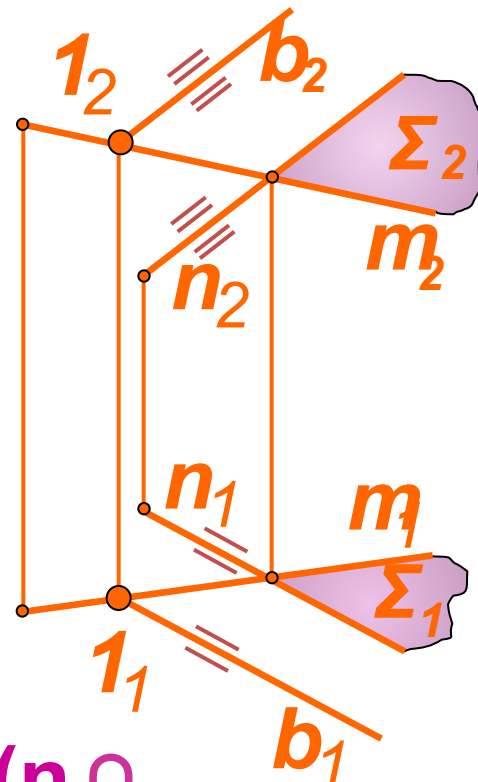
Принадлежность прямой плоскости

1



$\Sigma(n \parallel$
 $(m) \in m) \in \Sigma;$
 $(2 \in (m) \vee 2 \in \Sigma) \Rightarrow$
 $a \in \Sigma$

2

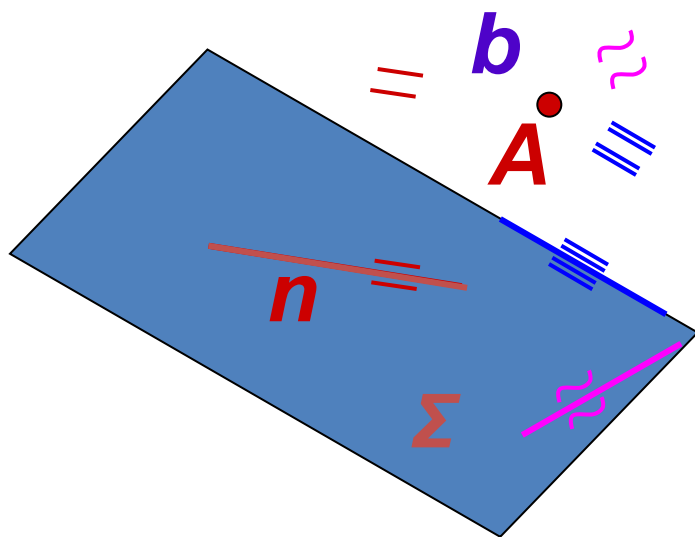


$\Sigma(n \perp$
 $(m) \in m) \in \Sigma;$
 $b \parallel n \Rightarrow$
 $b \in \Sigma$

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит:

- 1) через две точки этой плоскости;
- 2) через одну точку плоскости и параллельно какой-нибудь прямой этой плоскости

Параллельность прямой и плоскости



Признак параллельности:

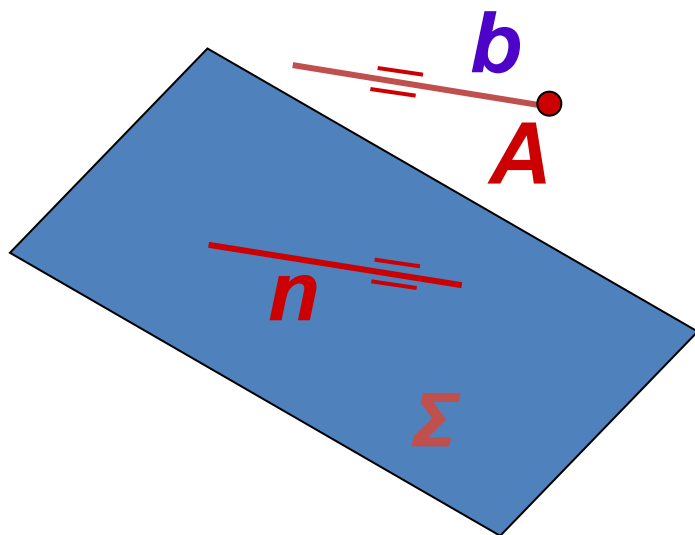
Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости

$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$

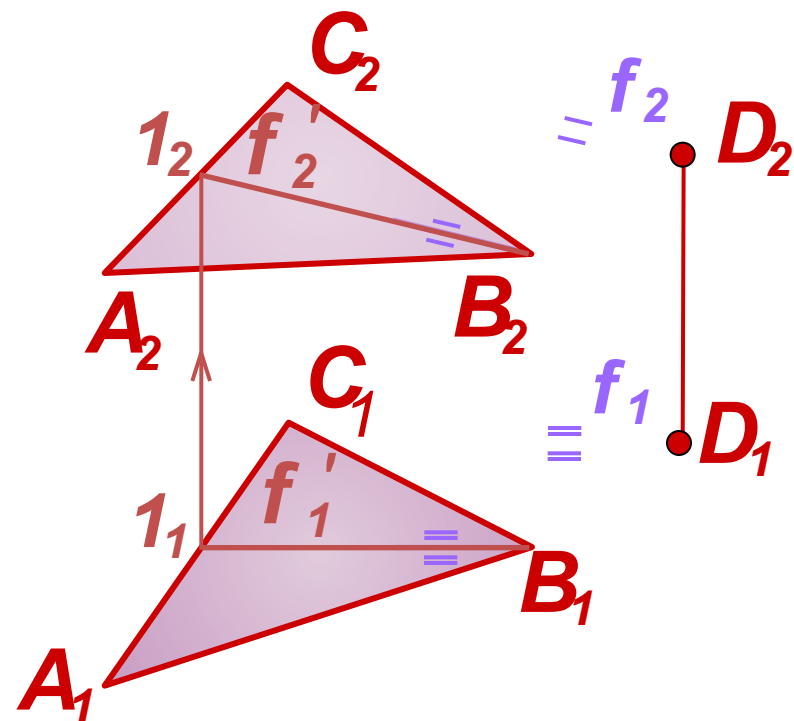
Через точку A в пространстве можно провести бесчисленное множество прямых линий, параллельных данной плоскости Σ . Для однозначного решения проведем в плоскости прямую n

Параллельность прямой и плоскости

Задача: Через точку D провести фронталь, параллельную плоскости $\Sigma(\triangle ABC)$

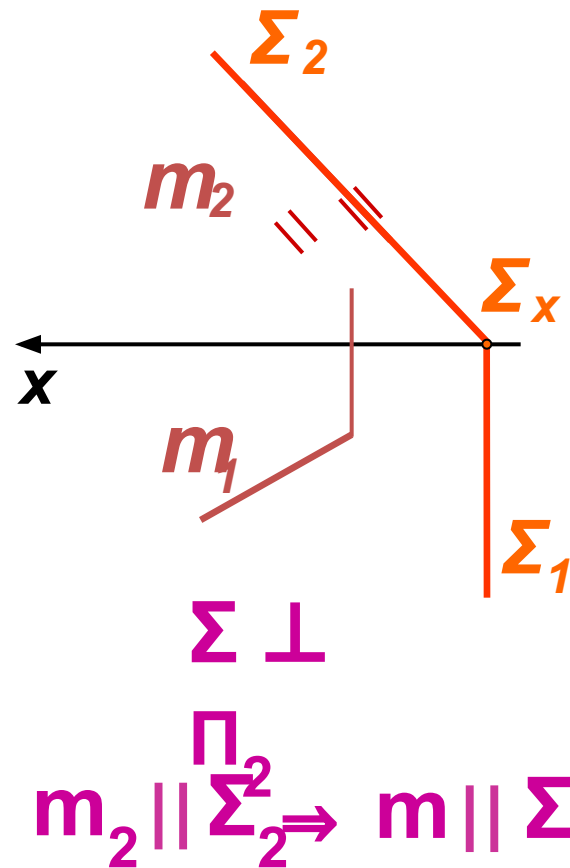
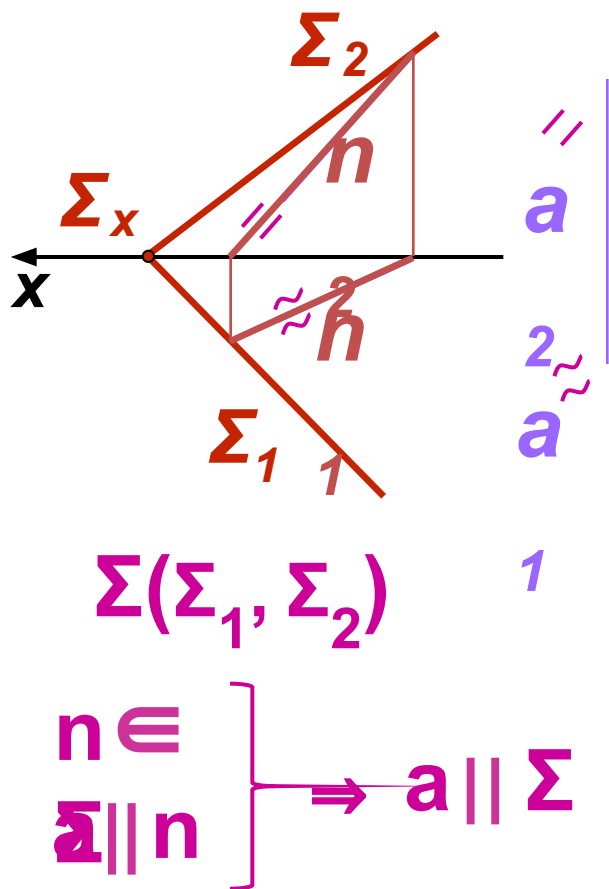


$$b \parallel n \in \Sigma \Rightarrow b \parallel \Sigma$$



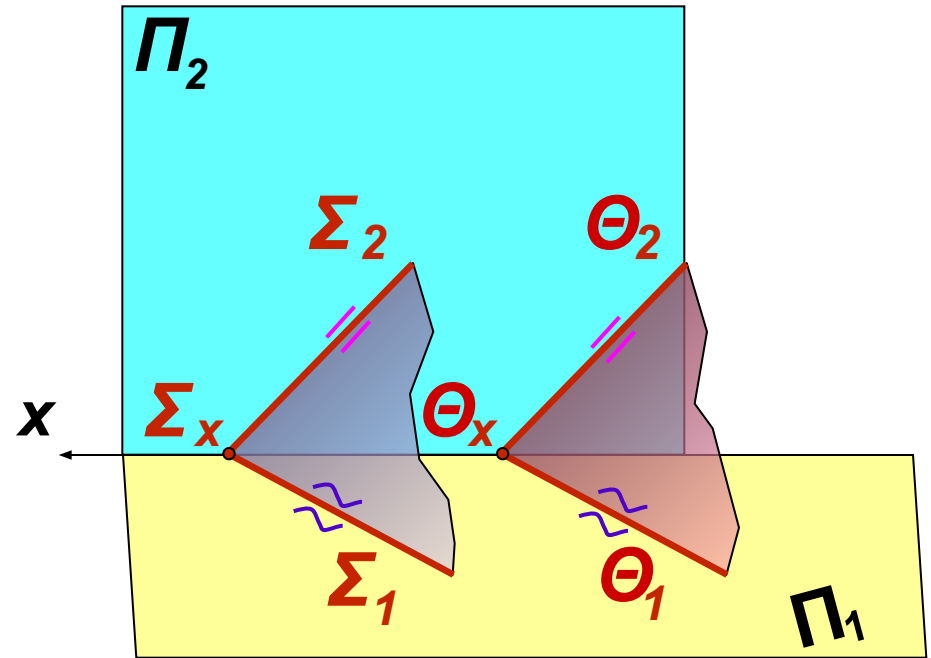
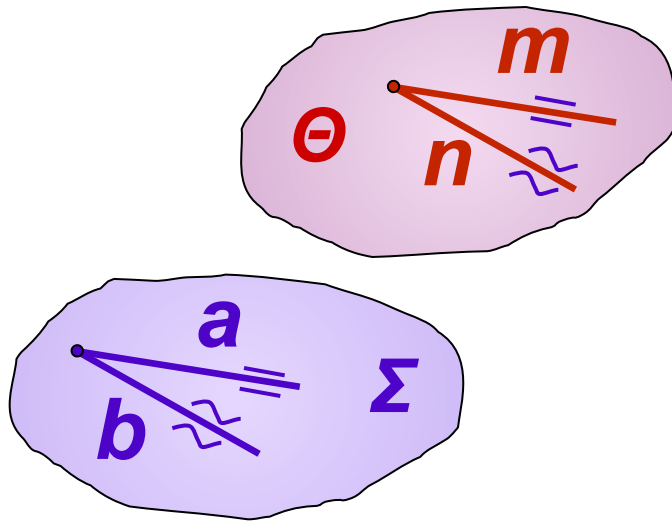
Построим в плоскости Σ ($\triangle ABC$) вспомогательную фронталь f' . Через точку D проводим фронталь f , проекции которой параллельны одноименным проекциям фронтали f' . Получаем искомую прямую f , параллельную заданной плоскости Σ ($\triangle ABC$)

Параллельность прямой и плоскости



Если прямая a параллельна плоскости общего положения, то в плоскости строят вспомогательную прямую n и выполняют условие параллельности одноименных проекций прямых a и n . Если плоскость проецирующая, то одна из проекций искомой прямой m параллельна следу плоскости

Параллельность двух плоскостей



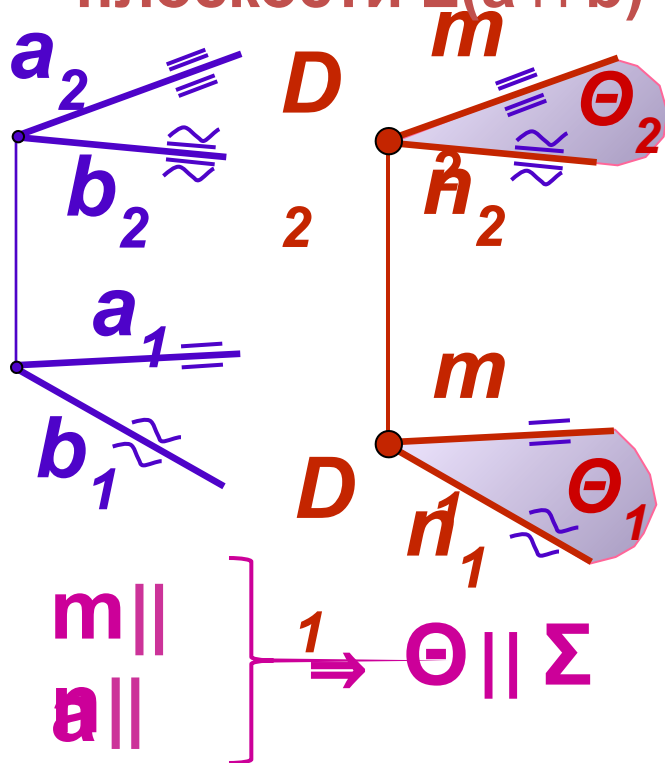
$$\left. \begin{array}{l} a \parallel m \\ b \parallel n \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_1 \parallel \Sigma_2 \\ \Theta_1 \parallel \Theta_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \Sigma \parallel \Theta$$

Признак параллельности: плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости. В качестве прямых могут быть использованы следы плоскостей

Параллельность двух плоскостей

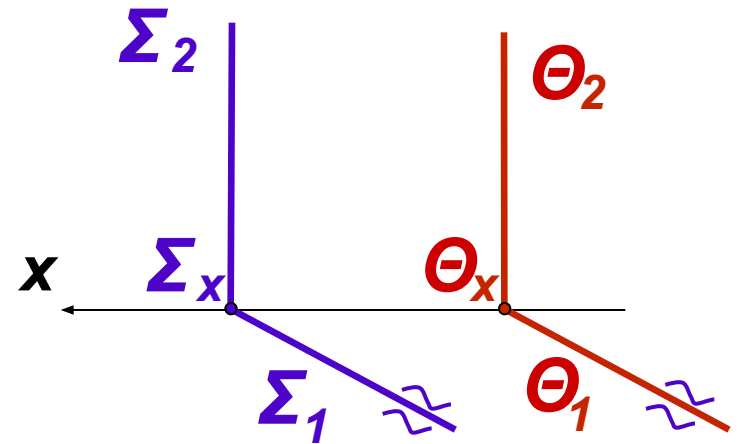
Задача 1: Через точку D провести плоскость Θ , параллельную плоскости $\Sigma(a \cap b)$



$$\left. \begin{array}{l} m \parallel \\ a \parallel \\ b \end{array} \right\} \xrightarrow{1} \Theta \parallel \Sigma$$

1. Искомая плоскость Θ задается двумя пересекающимися прямыми m и n , проекции которых соответственно параллельны проекциям прямых a и b заданной плоскости.
2. У параллельных плоскостей Θ и Σ следы параллельны

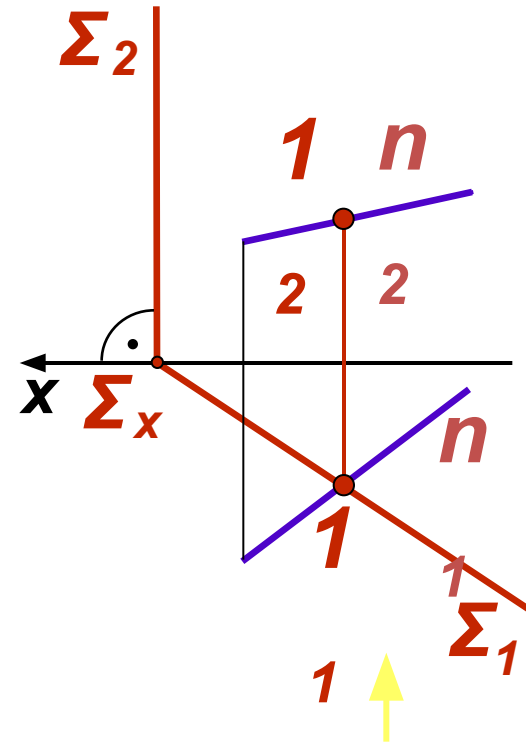
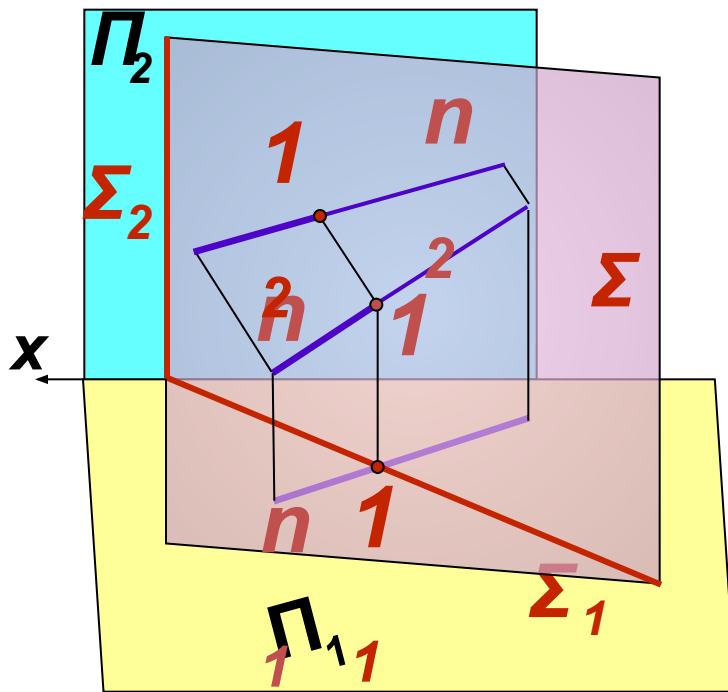
Задача 2: Построить плоскость $\Theta \parallel \Sigma \perp \Pi_1$



$$\Theta_1 \parallel \Sigma_1 \Rightarrow \Theta \parallel \Sigma$$

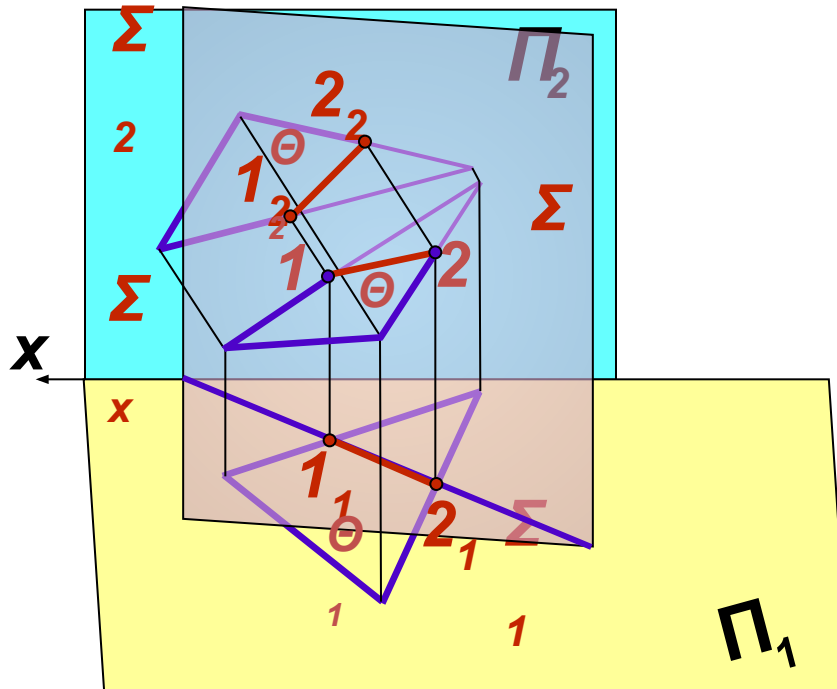
1

Пересечение прямой с проецирующей плоскостью



Одна из проекций точки 1 (пересечения прямой n с проецирующей плоскостью Σ) находится на пересечении следа плоскости Σ_1 с проекцией прямой n_1 . Видимость прямой определяется по направлению взгляда наблюдателя, плоскость считается непрозрачной

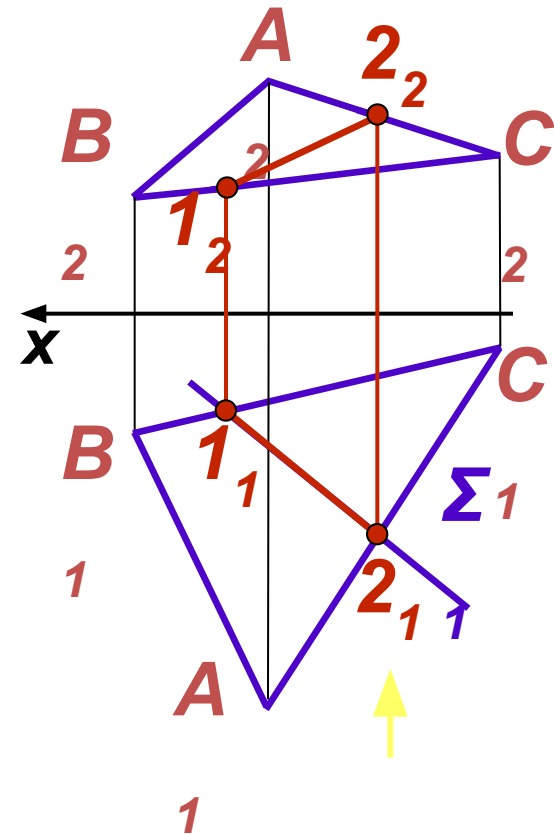
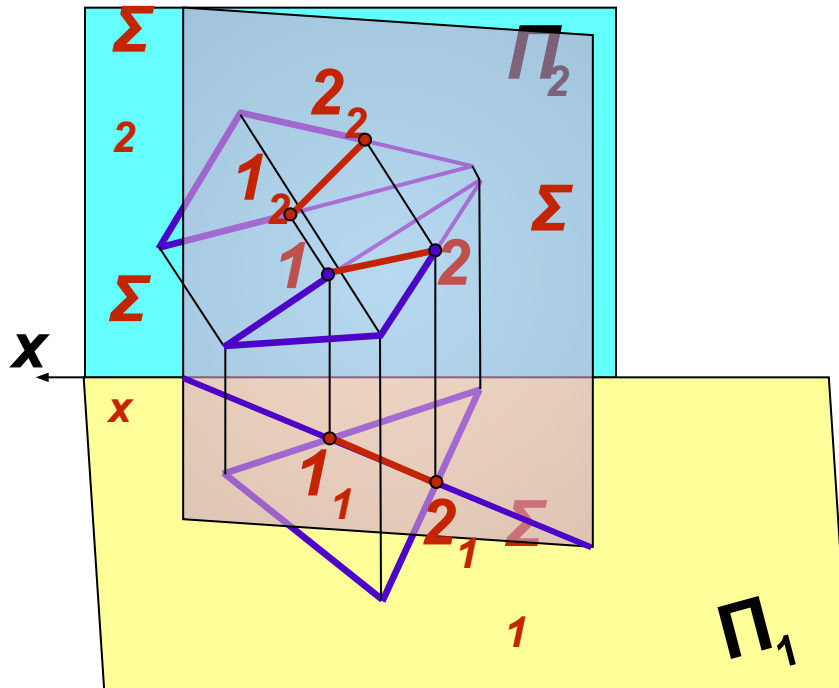
Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Σ – горизонтально проецирующая плоскость;
 $\Theta(\Delta)$ – плоскость общего положения

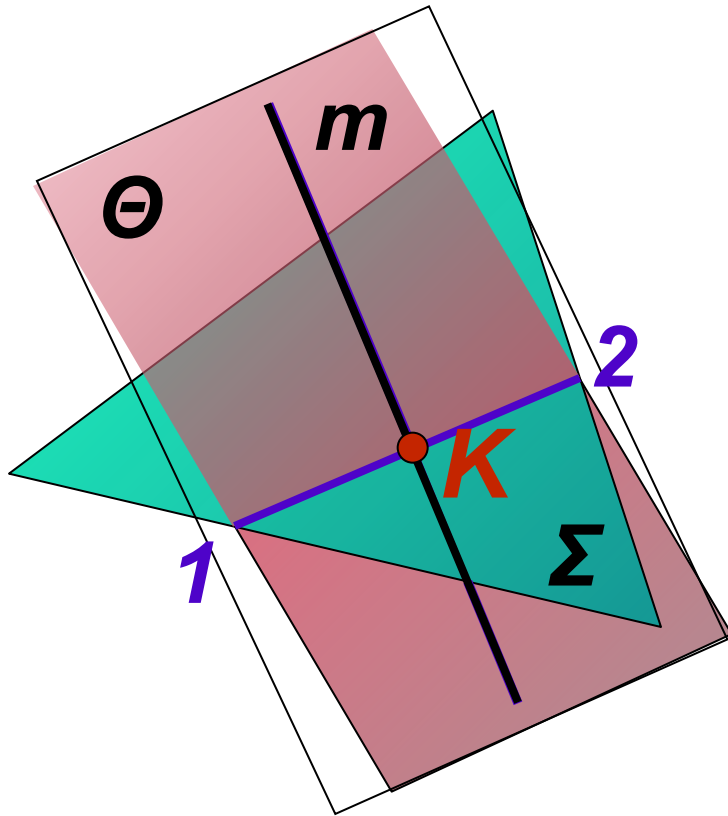
Две плоскости пересекаются по прямой линии. Необходимо найти две точки искомой линии пересечения, которые принадлежат одновременно двум плоскостям

Пересечение плоскости общего положения с проецирующей плоскостью



Горизонтально проецирующая плоскость Σ проецируется на Π_1 в виде следа, которому принадлежит проекция $1_1 2_1$ искомой линии пересечения. Часть треугольника, находящаяся перед плоскостью Σ , будет видима на Π_2 . Линия $1_2 2_2$ служит границей видимости

Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

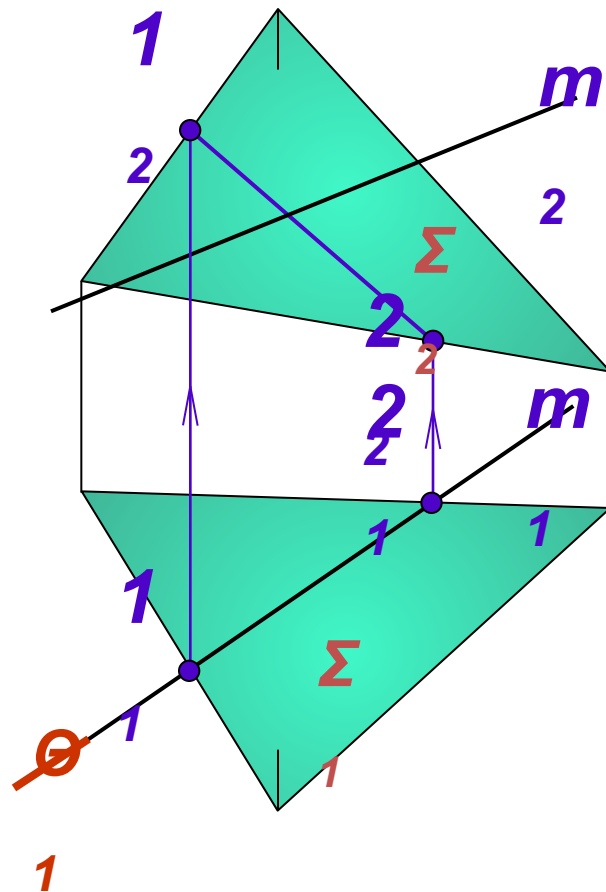


Алгоритм:

1. $m \in \Theta$
2. $\Theta \cap \Sigma = 1-2$
3. $1-2 \cap m = K$
4. Видимость m

1. Через данную прямую m проводят вспомогательную плоскость Θ .
2. Находят линию пересечения 1-2 плоскостей: заданной Σ и вспомогательной Θ .
3. На полученной линии пересечения 1-2 находят общую точку K с заданной прямой m .
4. Определяют видимость прямой m

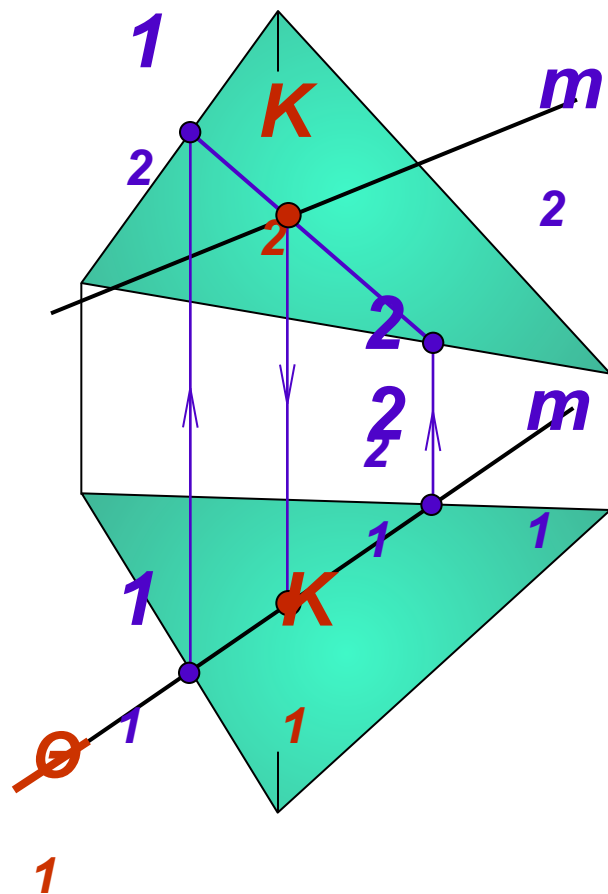
1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$

В качестве вспомогательной выбираем горизонтально проецирующую плоскость Θ (Θ_1), проходящую через заданную прямую m . Строим горизонтальную $1_1 2_1$, а затем фронтальную $1_2 2_2$ проекции линии пересечения вспомогательной плоскости Θ с данным треугольником Σ

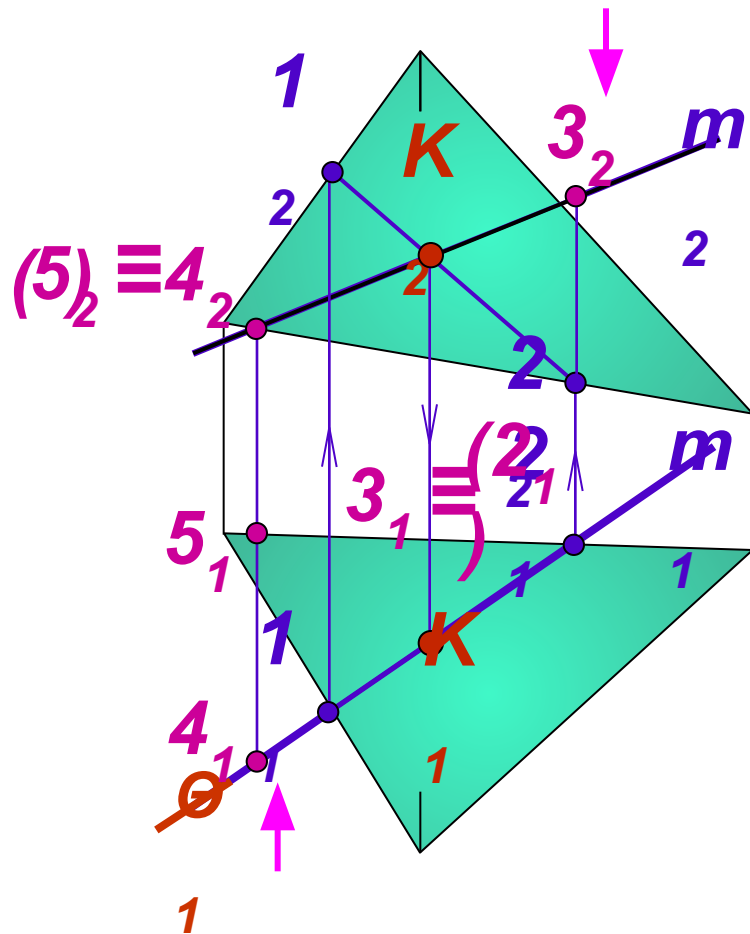
1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1-2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$

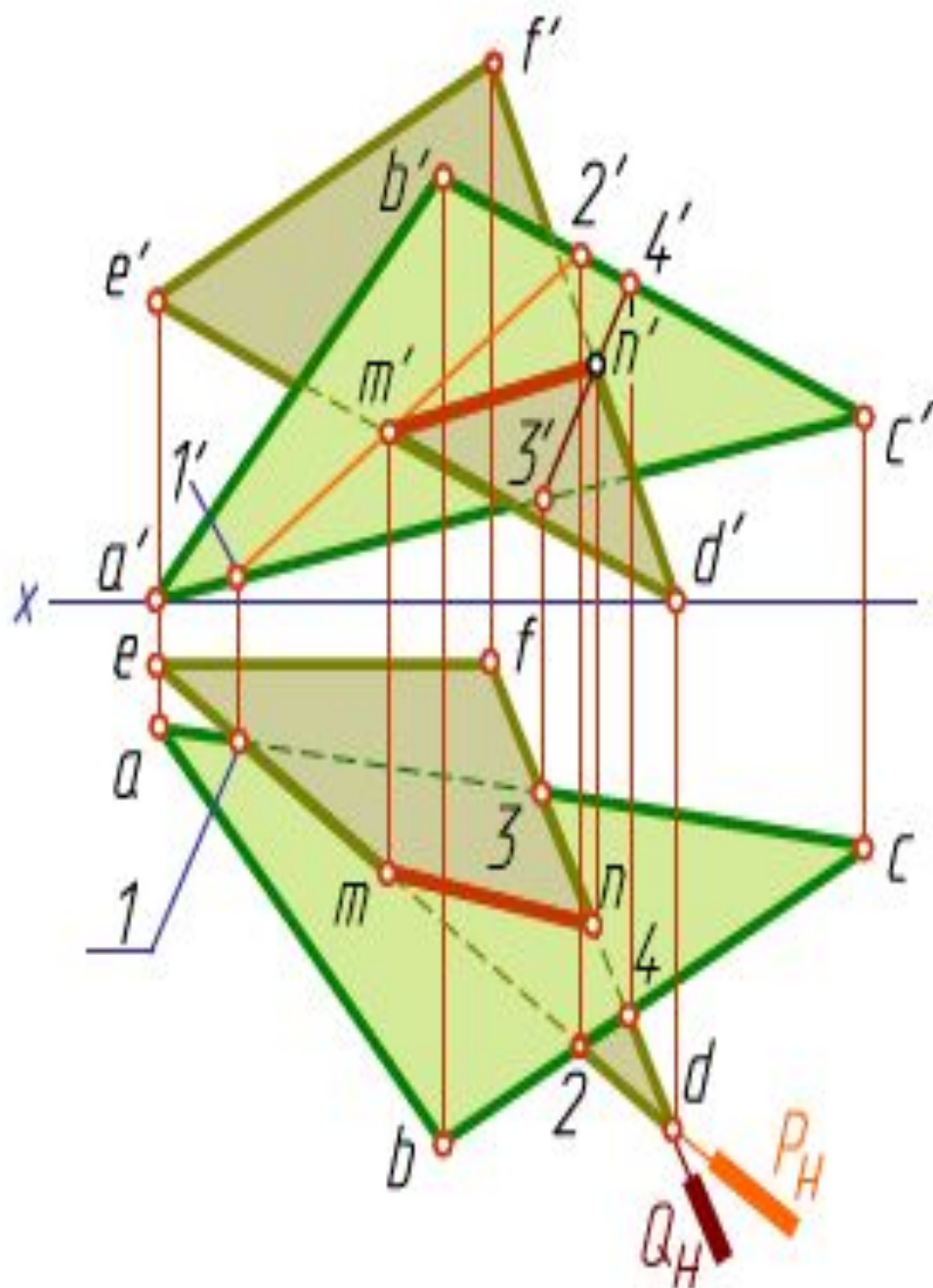
Находим фронтальную проекцию K_2 точки пересечения K линии 1-2 и данной прямой m . Горизонтальная проекция K_1 искомой точки пересечения будет принадлежать горизонтальной проекции m_1 прямой m

1 ПО. Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения



1. $m \in \Theta$;
 $\Theta \perp \Pi_1 \Rightarrow \Theta_1 \in m_1$
2. $\Theta \cap \Sigma(\Delta) = 1-2$;
 $1_1 2_1 \rightarrow 1_2 2_2$
3. $1-2 \cap m = K$; $K_2 \rightarrow K_1$
4. Видимость m
 (по конкурирующим точкам)

Видимость горизонтальной проекции прямой определяют по горизонтально конкурирующим точками 3 и 2 ($3 \in m$; $2 \in \Sigma$). Видимость фронтальной проекции прямой определяют по фронтально конкурирующим точками 4 и 5 ($4 \in m$; $5 \in \Sigma$). Видимость прямой m меняется в точке



1. $(ED) \subset P \perp H$
2. $(12) = P \cap \Delta ABC$
3. $(\bullet)M = (12) \cap (ED)$
4. $(FD) \subset Q \perp H$
5. $(34) = Q \cap \Delta ABC$
6. $(\bullet)N = (34) \cap (FD)$