# Основы математического анализа результатов экспериментального исследования

# Приближенные и точные числа

Точные числа выражают безошибочное значение каких-либо величин и обычно имеют математическое происхождение

Пример: 1,2,3,4, 0,5 1/3

Приближенные числа выражают значение какой-либо величины, полученное с погрешностями, возникающими в результате измерений, вычислений или округлений.

Пример: 1,0±0,1 0,51±0,01 1,5

Для оценки погрешности приближенных чисел, если она не задана в явном виде, используется правило - абсолютная погрешность берется равной половине единицы наименьшего разряда, представленного в числе

Пример: $\pi = 3{,}14$, $\Delta\pi = 0{,}005$

# Приближенные и точные числа

После того, как погрешность записана, значение результата должно быть округлено таким образом, чтобы его последняя значащая цифра была того же разряда, что и у погрешности

Результаты измерений: 1252 ± 10 В, 52,1 ± 1 °C

Записывать как:  1250 ± 10 В, 52,0 ± 1 °C

# Умножение приближенных чисел

Сложение приближенных чисел:

Предельная относительная ошибка произведения:
$y \pm \Delta y = (a \pm \Delta a)(b \pm \Delta b)$
равна сумме предельных относительных ошибок сомножителей:

$$E_y = \pm\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}\right)$$

Предельная абсолютная ошибка произведения :

$$\Delta y = y\, E_y$$

# Возведение приближенного числа в степень

При возведении приближенного числа a в степень n

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$

Предельная относительная ошибка равна:

$$E_y = \pm n \frac{\Delta a}{a}$$

Правило справедливо при дробных n, то есть при извлечении корня.

# Общая формула для предельной относительной ошибки функции

Предельная относительная ошибка функции одного аргумента f(a) равна произведению производной от логарифма этой функции f'(a) на предельную абсолютную ошибку аргумента Δa:

$$E_y = \pm[\ln f(a)]' \,\Delta a$$

Предельная относительная ошибка функции двух аргументов f(a, b) равна сумме произведений частных производных от логарифма этой функции отдельно по каждому из аргументов на предельную абсолютную ошибку каждого из аргументов:

$$E_y = \pm\left[\left|\frac{\partial}{\partial a}\ln f(a,b)\,\Delta a\right| + \left|\frac{\partial}{\partial b}\ln f(a,b)\,\Delta b\right|\right]$$

# Общая формула для предельной относительной ошибки функции

Алгоритм нахождения предельной относительной ошибки функции произвольного вида:

1. Логарифмировать функцию $f(a,b,c\ldots)$
2. Вычислить частные производные по каждому аргументу $a,b,c\ldots$
3. Умножить каждую частную производную на предельную абсолютную ошибку своего аргумента $\Delta a$, $\Delta b$, $\Delta c\ldots.$
4. Каждому из этих произведений приписываем знак «плюс» и складываем их вместе. Это и будет предельная относительная ошибка функции

# Формулы для предельной относительной ошибки функций

**Вычисление предельной относительной ошибки**

| **Вид функции** $y = f(a,b,c\ldots)$ | **Предельная относительная ошибка функции** $E$ |
|---|---|
| $y = \frac{N}{a}$ | $\frac{\Delta a}{a}$ |
| $y = N(a+b+c)$ | $\frac{\Delta a + \Delta b + \Delta c}{a+b+c}$ |
| $y = N(a-b)$ | $\frac{\Delta a + \Delta b}{a-b}$ |
| $y = Na^n$ | $n\frac{\Delta a}{a}$ |
| $y = \sqrt[p]{a}$ | $\frac{1}{p}\frac{\Delta a}{a}$ |
| $y = Nabc$ | $\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$ |
| $y = N\frac{a}{b}$ | $\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$ |
| $y = Na^p b^q c^r$ | $p\frac{\Delta a}{a} + q\frac{\Delta b}{b} + r\frac{\Delta c}{c}$ |
| $y = N\frac{a^p}{b^q c^r}$ | $p\frac{\Delta a}{a} + q\frac{\Delta b}{b} + r\frac{\Delta c}{c}$ |
| $y = NSin(x)$ | $ctg(x)\Delta x$ |
| $y = NCos(x)$ | $tg(x)\Delta x$ |
| $y = \frac{a^p}{b^q \pm c^r}$ | $p\frac{\Delta a}{a} + \frac{qb^{q-1}\Delta b + rc^{r-1}\Delta c}{b^q \pm c^r}$ |

* $N$ – точное число

# Средняя квадратичная ошибка функции

Для функции f(a,b,c,…) составленной из приближенных чисел можно записать среднюю квадратичную ошибку $S_y$

$$S_y = \pm y \sqrt{\left[\frac{\partial}{\partial a}\ln f(a,b,c \ldots)\right]^2 \left[{S_a}^2\right] + \left[\frac{\partial}{\partial b}\ln f(a,b,c \ldots)\right]^2 \left[{S_b}^2\right] + \cdots}$$

# Обработка результатов измерений

Если одна физическая величина зависит от другой величины то эту зависимость можно исследовать измеряя y при различных значениях величины x. Экспериментально полученная зависимость имеет вид рядов значений:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots x_n$$
$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots y_n$$

По результатам эксперимента можно построить график зависимости y=f(x) использую ту или иную математическую непрерывную функцию.

Постоянные коэффициенты, входящие в эту функцию остаются неизвестными.

Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов требует, чтобы ϕ сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от кривой была наименьшей.

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} (y_i - k\, x_i)^2$$

# Регрессионный анализ

<u>Регрессия</u> — зависимость математического ожидания (например, среднего значения) случайной величины от одной или нескольких других случайных величин (свободных переменных).

Регрессионный анализ – это метод, позволяющий установить аналитическую зависимость между выходной и входными величинами по данным эксперимента.

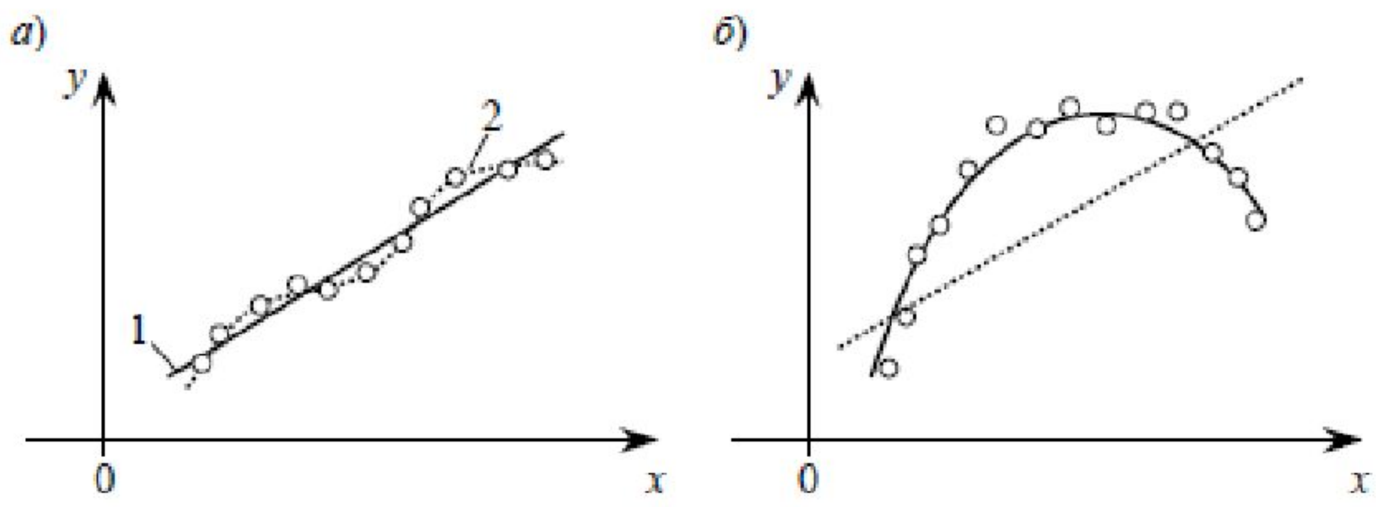
Экспериментально полученная зависимость одной величины (y) от другой (x) имеет вид табличных данных представляемых на графике в виде набора точек. Для аппроксимации данных (на ограниченном интервале аргументов) необходимо получить эмпирическое выражение. При подборе эмпирической формулы определяющим моментом является не сложность зависимости, а величина погрешности, которая допускается при ее применении.

# Регрессионный анализ

Регрессия — зависимость математического ожидания (например, среднего значения) случайной величины от одной или нескольких других случайных величин (свободных переменных).
Регрессионный анализ – это метод, позволяющий установить аналитическую зависимость между выходной и входными величинами по данным эксперимента.

Экспериментально полученная зависимость одной величины (y) от другой (x) имеет вид табличных данных представляемых на графике в виде набора точек. Для аппроксимации данных (на ограниченном интервале аргументов) необходимо получить эмпирическое выражение. При подборе эмпирической формулы определяющим моментом является не сложность зависимости, а величина погрешности, которая допускается при ее применении.

# Регрессионный анализ




При подборе эмпирической формулы определяющим моментом является не сложность зависимости, а величина погрешности, которая допускается при ее применении.

Для математического описания (аппроксимации) этих данных может использоваться как линейная, так и нелинейная зависимость.

# Регрессионный анализ

Выбор вида эмпирической зависимости

Выбор вида эмпирической зависимости целесообразно осуществлять с учетом физических закономерностей исследуемого процесса. Например падение напряжения на резистивном элементе линейно пропорционально протекающему току, а зависимость мощности на сопротивлении пропорциональна квадрату тока. Вольтамперная характеристика полупроводникового прибора хорошо аппроксимируется экспоненциальной зависимостью. В соответственно с этим выбирать вид аппроксимирующей зависимости.

Типовые виды аппроксимирующих зависимостей

- линейные;
- полиномиальные;
- экспоненциальные;

# Регрессионный анализ

Выбор коэффициентов эмпирической зависимости

Аппроксимационная зависимость описывается в виде некоторой функции:

$$\hat{y} = f\ (x_1, x_2, \dots, x_k\ )$$

Которая имеет m неизвестных параметров (коэффициентов):

$$b_1, b_2, \dots, b_k$$

Необходимо определить такое сочетание этих коэффициентов, при котором значения аппроксимационной зависимости будут наиболее близки к экспериментальным данным.

# Регрессионный анализ

Два подхода к проблеме выбора коэффициентов эмпирической зависимости

Интерполирование – обеспечение условия совладения вычислений по функции с экспериментальными данными в некоторых опорных (узловых) точках. При этом результаты вычислений могут значительно расходиться с экспериментальными данными.

Аппроксимация функцией. Аппроксимирующую функцию подбирают таким образом, чтобы её отклонение от экспериментальных данных в заданной области было наименьшим.

# Регрессионный анализ

Виды аппроксимации

Непрерывная аппроксимация

f(x) – исходная функция.

φ(x) – аппроксимирующая функция.

При условии минимального отклонения φ(x) от f(x) на некотором отрезке [a,b] такую аппроксимацию называют непрерывной. Если максимальное отклонение аппроксимирующей функции φ(x) от функции f(x) по абсолютной величине меньше некоторой точности приближения ε:

$$f\ (x) - \varphi(x) < \varepsilon, \qquad a \le x \le b$$

Часто применяется так называемое среднеквадратичное приближение, при котором наименьшее значение принимает величина:

$$\mathrm{M} = \int_a^b [f\ (x) - \varphi(x)]^2\, dx$$

# Регрессионный анализ

Точечная аппроксимация

Отличие в том, что функция f (x) задается в табличном виде:

$\{x_i\}$ – множество аргументов;

$\{y_i\}$ – множество значений функций (табличное значение);

φ(x) – аппроксимирующая функция.

Аппроксимирующую функцию φ(x) строят из условия минимума величины (среднеквадратичное приближение):

$$\mathrm{M} = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i)]^2$$