Тема «Комплексные числа и действия над ними»

***Основные понятия*:**

1. **Определение** **Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.**
2. **Геометрическое изображение комплексного числа.**
3. **Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.**
4. **Тригонометрическая форма комплексного числа.**
5. **Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.**
6. **Возведение в степень комплексного числа.**
7. **Извлечение корней из комплексного числа.**

Завершить

1. Определение комплексного числа. Алгебраическая форма комплексного числа.

Комплексным числом называют упорядоченную пару $(a;b)$ действительных чисел a и b, ***алгебраической формой*** которого является $z = a + b \cdot i$

a = Re z – действительная часть комплексного числа,
b = Im z – мнимая часть комплексного числа,
i – мнимая единица ($i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$).

Комплексное число $\overline{z} = a - b \cdot i$ называют ***сопряженным***

к комплексному числу $z = a + b \cdot i$

назад

Назовите действительную и мнимую части чисел:

а) 2-3i

б) 4+6i

в) 3i+9

г) 5i

д) -91i

е) 1

Комплексные числа по виду делятся:

-если a=0, то комплексное число z=bi- называется **чисто мнимым**.

-если b=0, то комплексное число z=a- называется **чисто действительным**.

- если a=0 и b=0, то комплексное число z=0.

- Два комплексных числа называются равными, если равны их действительные и равны их мнимые части:

$a + bi = c + di$ $\qquad$ $a = c,\ b = d$

Устная работа

- Назовите пары равных между собой комплексных чисел:

а) $-3+2i$ и $3+2i$; б) $0,4+3,1i$ и $0,4+3i$; в) $6-i$ и $-i+6$;

г) $5,8-6i$ и $-6i-5,8$; д) $12,4$ и $12,4i$; е) 0 и $i\text{x}0$;

ж) $-10+3/2i$ и $-10+1,5i$; з) $2/5+7i$ и $7i+0,4$;

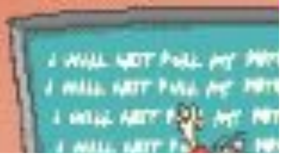
и) $-108+i$ и $i-10,8$; к) $6/8+i\text{x}0$ и $6/8$.

- Два комплексных числа

$z = a + bi$ и $-z = -a - bi$ называются <u>противоположными.</u>

Сумма двух противоположных чисел равна 0:

$$z + (-z) = 0$$



Устная работа

- Назовите пары противоположных комплексных чисел:

а) -8+i и -8+2i; б) -0,4+3i и 0,4-3i; в) 9-i и –i+9;

г) 5,8-6i и 6i-5,8; д) -12,4 и 12,4i; е) 0 и ix0;

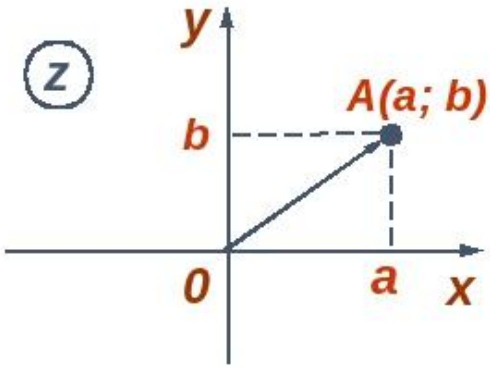
ж) 57+3/2i и -57-1,5i ; з) 2/5-7i и 7i+0,4;

и) -89,7+i и -i+8,97; к) 6/8+ix0 и -6/8.

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a;\, b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют ***плоскостью комплексной переменной***.



Точкам, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют ***действительной осью***.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют ***мнимой осью***.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор $\overline{OA}$

Пример 1. Изобразить на комплексной плоскости следующие комплексные числа

$$z_1 = -2$$

$$z_2 = 3i$$

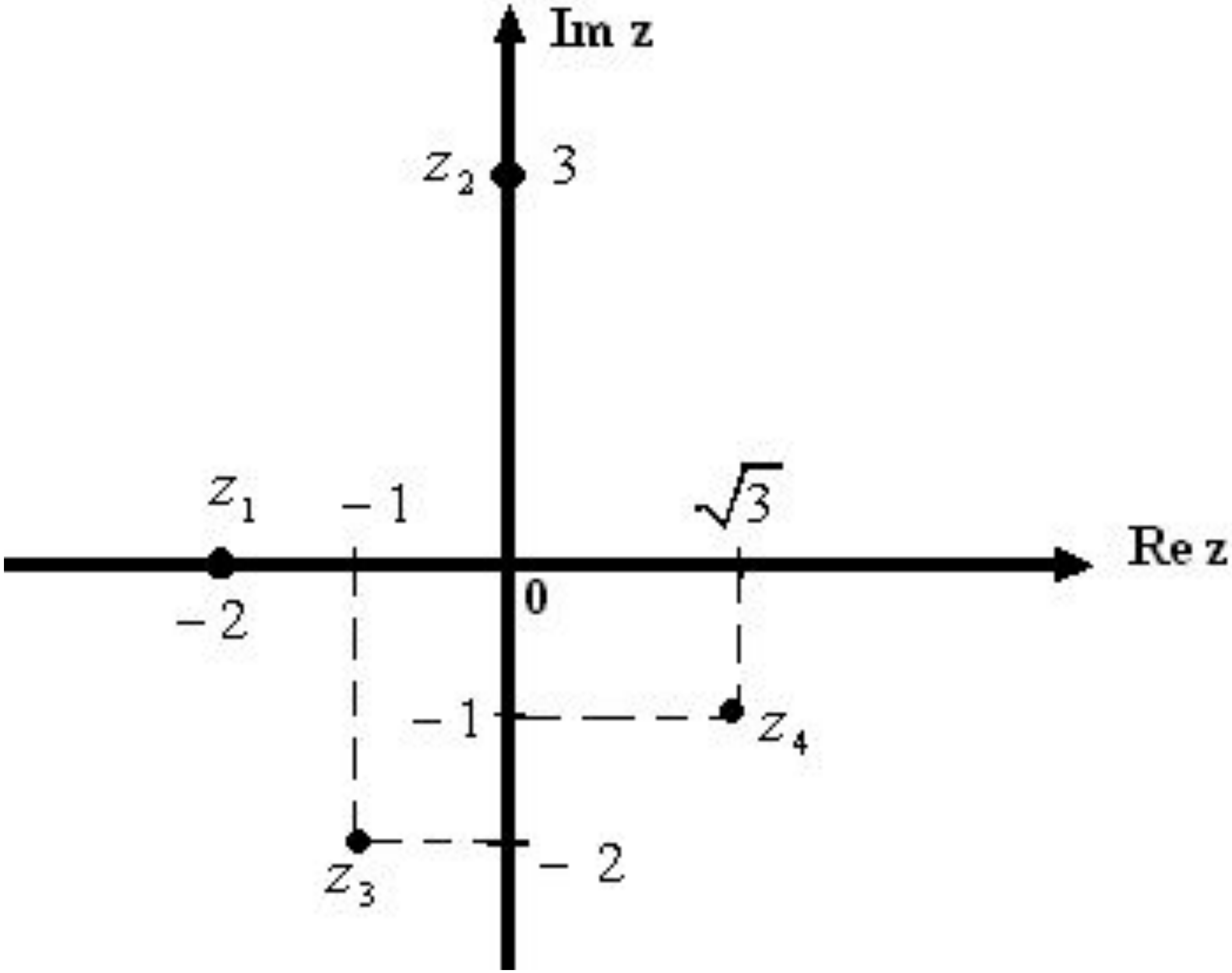
$$z_3 = -1 - 2i$$

$$z_4 = \sqrt{3} - i$$

Решение

назад

Решение (Пример 1).



$$z_1 = -2$$

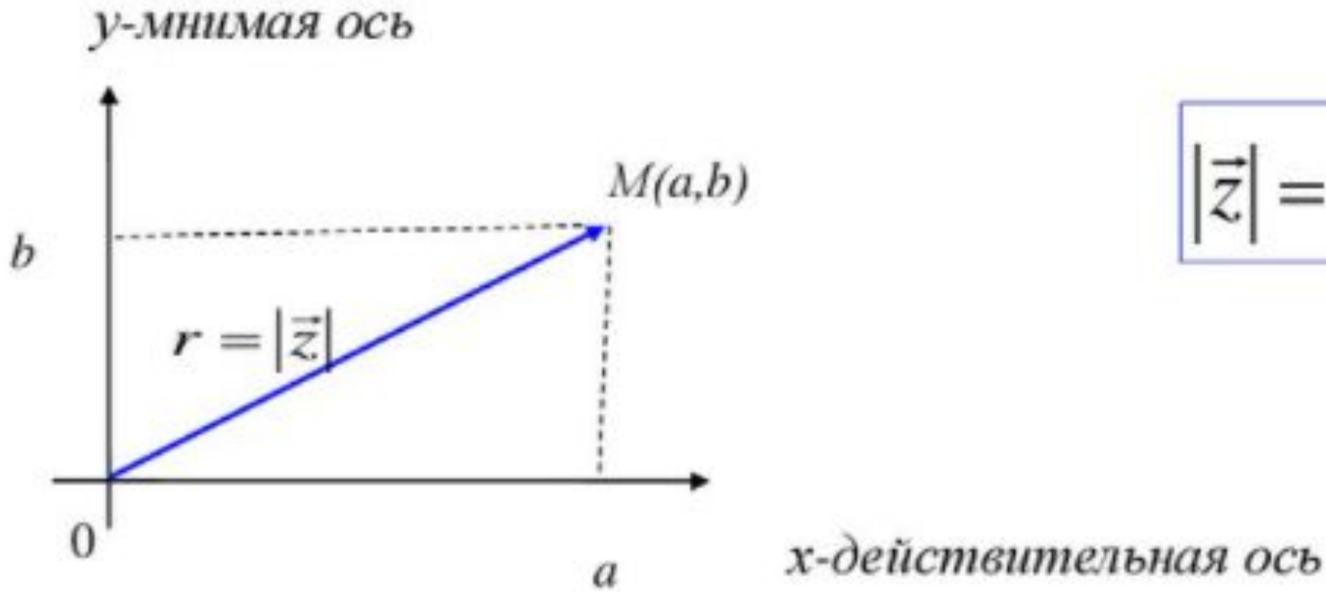
$$z_2 = 3i$$

$$z_3 = -1 - 2i$$

$$z_4 = -i + \sqrt{3}$$

назад

- **Модулем** комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора $\vec{z}$



$$|\vec{z}|=\sqrt{a^2+b^2}$$

2. Найти модуль комплексного числа:

$$\boxed{|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$z_1 = 2 - i$$

$$z_2 = 2\sqrt{6} + 5i$$

$$z_3 = i$$

$$z_4 = -4$$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{24+25} = \sqrt{49} = 7$$

$$|z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

3. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

- Сложение (вычитание) комплексных чисел
- Умножение комплексных чисел
- Деление комплексных чисел
- Нахождение обратного числа к комплексному числу

Рассмотрим два комплексные числа

$$z_1 = a + b \cdot i$$

и

$$z_2 = c + d \cdot i$$

назад

Сложение (вычитание):

$$z_1 + z_2 = (a + b \cdot i) + (c + d \cdot i) = (a + c) + (b + d) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (a + b \cdot i) - (c + d \cdot i) = (a - c) + (b - d) \cdot i$$

Пример 2. Для $z_1 = 2i - 3,\quad z_2 = 3 - 4i$ вычислить

$z_1 + z_2,\quad z_1 - z_2,\quad z_2 - z_1$

Решение

назад

<u>Решение</u> (Пример 2):

$$z_1 + z_2 = (-3 + 2i) + (3 - 4i) = (-3 + 3) + (2 - 4)i = -2i$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 2i) - (3 - 4i) = -6 + 6i$$

$$z_2 - z_1 = (3 - 4i) - (-3 + 2i) = 6 - 6i$$

назад

<u>Умножение</u>:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(a + b \cdot i\right) \cdot \left(c + d \cdot i\right) = \left(ac - bd\right) + \left(bc + ad\right) \cdot i$$

<u>Пример 3</u>. Для $z_1 = 2i - 3, \quad z_2 = 3 + 4i$ вычислить $z_1 \cdot z_2$

<u>Решение</u>

<u>назад</u>

Решение (Пример 3):

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 2i)\cdot(3 - 4i) =$$

$$= (-3)\cdot 3 + (-3)\cdot(-4i) + 2i \cdot 3 + \underbrace{2i \cdot (-4i)}_{-8i^2 = -8\cdot(-1) = 8} =$$

$$= -1 + 18i$$

[назад](#)

Деление: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + b \cdot i}{c + d \cdot i} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$$

Пример 4. Для $z_1 = 2i - 3,\quad z_2 = 3 - 4i$ вычислить $\dfrac{z_1}{z_2}$

Решение

назад

Решение (Пример 4):

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{-3+2i}{3-4i}=\frac{-3+2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=$$

$$=\frac{-9-12i+6i+8i^2}{9-\underbrace{16i^2}_{16\cdot(-1)=-16}}=-\frac{17}{25}-\frac{6}{25}i$$

назад

<u>Нахождение обратного числа к комплексному числу</u> :

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{a + b \cdot i} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot i$$

<u>Пример 5</u>. Для $z_1 = 2i - 3, \; z_2 = 3 - 4i$ вычислить $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$

<u>Решение</u>

<u>назад</u>

Решение (Пример 5):

$$\frac{1}{z_1}=\frac{1}{-3+2i}=\frac{1}{-3+2i}\cdot\frac{-3-2i}{-3-2i}=$$

$$=\frac{-3-2i}{9-4i^2}=-\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$$

$$\frac{1}{z_2}=\frac{1}{3-4i}=\frac{1}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}=$$

$$=\frac{3+4i}{9-16i^2}=\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$$

назад

6. Возведение в степень комплексного числа.

Рассмотрим возведение в степень мнимой единицы:

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i \text{ è ò.ä.}$$

$$i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,\quad k = 0,1\ldots$$

При возведении $(a \pm b \cdot i)^2$ и $(a \pm b \cdot i)^3$ пользуются формулами сокращенного умножения.

<u>Пример 7</u>. Вычислить

$$1)\frac{i^{80} - i^{123}}{i^{73} + i^{68}};\quad 2)(3-5i)^2;\quad 3)(i-2)^3$$

<u>Решение</u>Решение <u>назад</u>

<u>Решение</u> (Пример 7):

$$1)\ \frac{i^{80}-i^{123}}{i^{73}+i^{68}}=\frac{i^{4\cdot 20+0}-i^{4\cdot 30+3}}{i^{4\cdot 18+1}+i^{4\cdot 17+0}}=\frac{i^{0}-i^{3}}{i^{1}+i^{0}}=\frac{1-(-i)}{i+1}=1$$

$$2)\ (3-5i)^2=9-30i+\underbrace{25i^2}_{25\cdot(-1)=-25}=-16-30i$$

$$3)\ (i-2)^3=\underbrace{i^3}_{-i}-\underbrace{3\cdot i^2\cdot 2}_{-6}+\underbrace{3\cdot i\cdot 2^2}_{12i}-\underbrace{2^3}_{8}=-2+11i$$

назад

7. Извлечение корней из комплексного числа.

Извлечение квадратных корней:

$$\sqrt{a+b\cdot i}=u+v\cdot i \quad \Rightarrow \quad (u+v\cdot i)^2=a+b\cdot i$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u^2-v^2=a \\ 2uv=b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u^2=\dfrac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \\ v^2=\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2} \end{cases}$$

Пример 9. Вычислить $\sqrt{5-12i}$

Решение

далееdалее назад

Решение (Пример 9):

$$\sqrt{5-12\cdot i}=u+v\cdot i \quad\Rightarrow\quad (u+v\cdot i)^2=5-12\cdot i$$

$$\Rightarrow\begin{cases}u^2-v^2=5\\ 2uv=-12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=\dfrac{5+\sqrt{5^2+(-12)^2}}{2}=9\\ v^2=\dfrac{-5+\sqrt{5^2+(-12)^2}}{2}=4\end{cases}\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}u=3\overset{uv=-6}{\Rightarrow}v=-2\\ u=-3\overset{uv=-6}{\Rightarrow}v=2\end{array}\right.\Rightarrow\sqrt{5-12\cdot i}=\pm(3-2\cdot i)$$

Спасибо за внимание!

Не забывайте готовиться к урокам

Удачи!