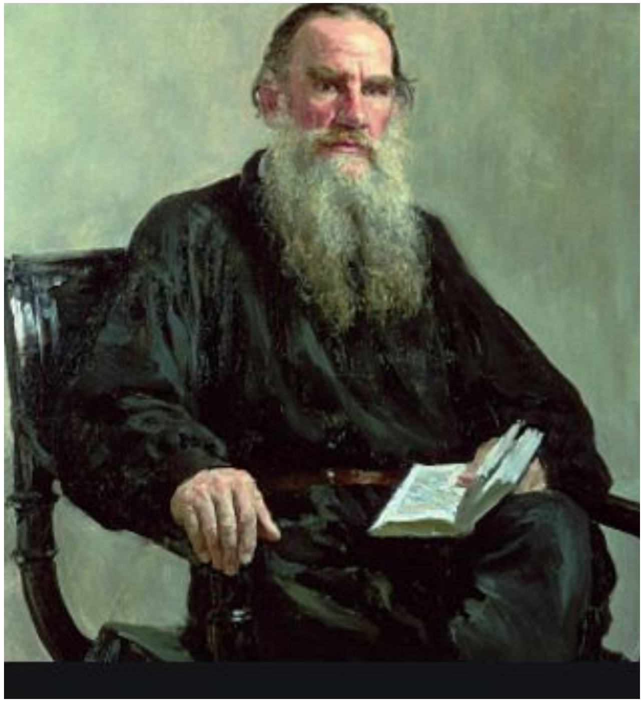
# Фрактальные круги в многоугольниках (литературная математика)

**Екимовская Анна Алексеевна,**
ученица 10 класса,
МАОУ «СОШ №40»
города Череповца Вологодской области,
8-996-513-61-49,
Any_ekimovskaya03@mail.ru


**Научный руководитель:**
**Екимовская Валерия Алексеевна,**
студентка 3 курса,
ФГБОУ ВО НИУ «Московский государственный строительный университет», 8-916-485-99-11,
lera.ek00@mail.ru

**Видеоролик о работе:**
https://youtu.be/IZY5K3vNgpM

## От литературы к физике, от физики к математике



1. Начальная школа.

2. Проблемный рассказ для подготовки к ЕГЭ по русскому языку после 11

Ссылка на фотографию:

**Лев Николаевич Толстой**
**КАКАЯ БЫВАЕТ РОСА НА ТРАВЕ**
*(Описание)*

Когда в солнечное утро летом пойдешь в лес, то на полях, в траве видны алмазы. Все алмазы эти блестят и переливаются на солнце разными цветами — и желтым, и красным, и синим. Когда подойдешь ближе и разглядишь, что это такое, то увидишь, что это капли росы собрались в **треугольных** листах травы и блестят на солнце.

Листок этой травы внутри мохнат и пушист, как бархат. И капли катаются по листку и не мочат его.

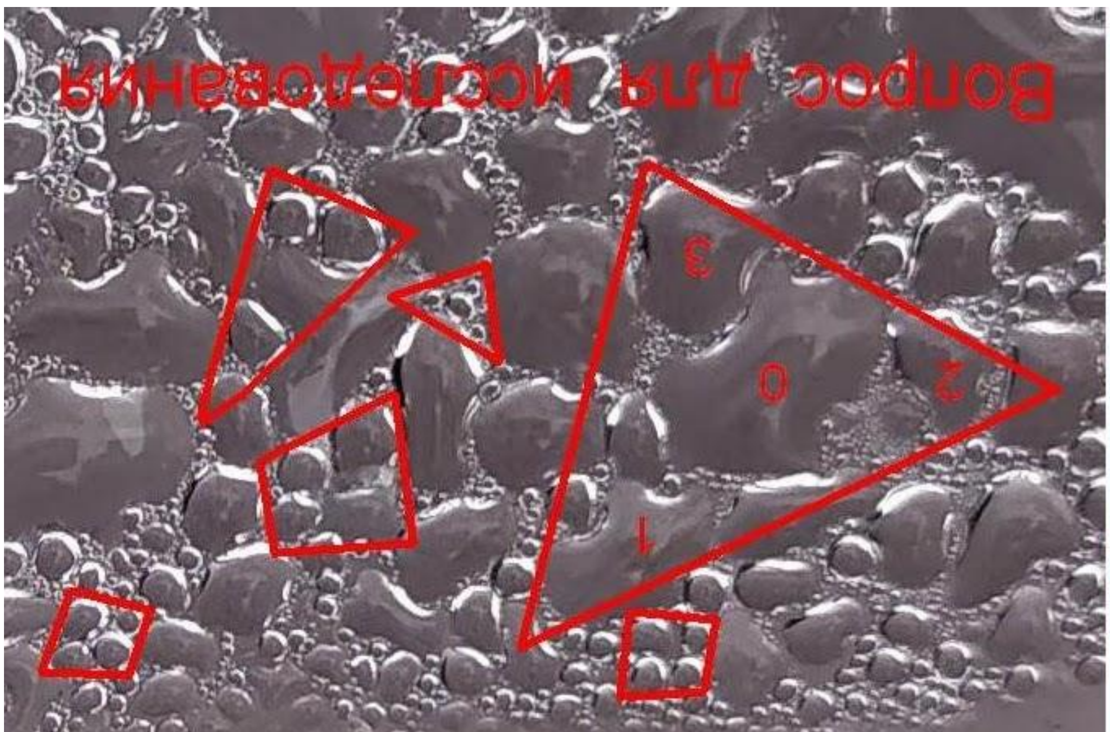
Когда неосторожно сорвешь листок с росинкой, то капелька скатится, как шарик светлый, и не увидишь, как проскользнет мимо стебля. Бывало, сорвешь такую чашечку, потихоньку поднесешь ко рту и


**Почему именно треугольники увидел Л.Н.Толстой на листочках с росой?**

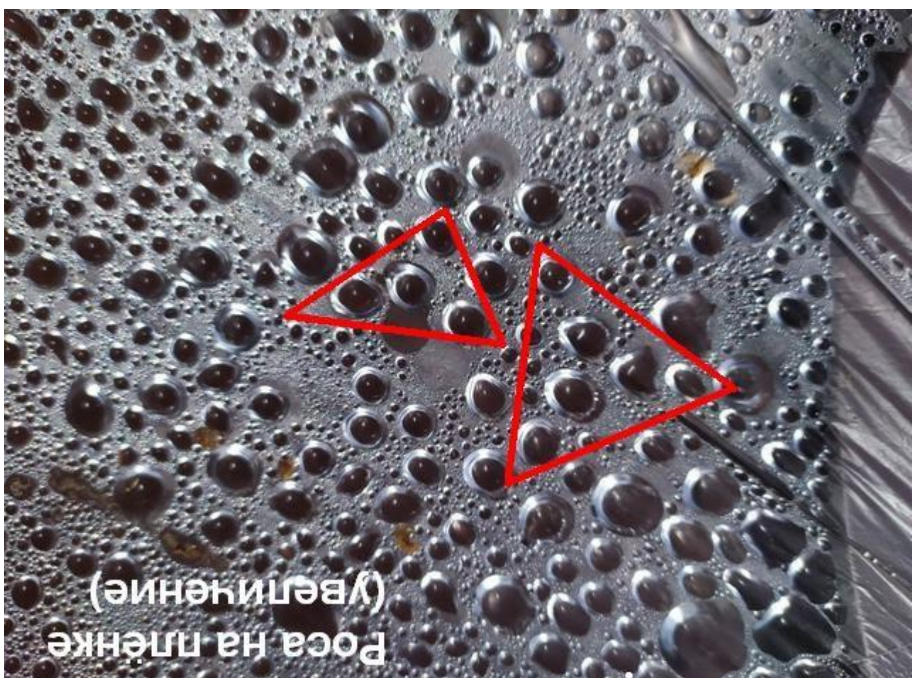
**Начало исследования**

**Поиск треугольников**

# Любой многоугольник может быть составлен из треугольников


# Конденсат на полиэтиленовой плёнке – появление проблемного вопроса


**Содержательная формулировка задачи: как соотносятся по размерам круги, вписанные в различные многоугольники?**

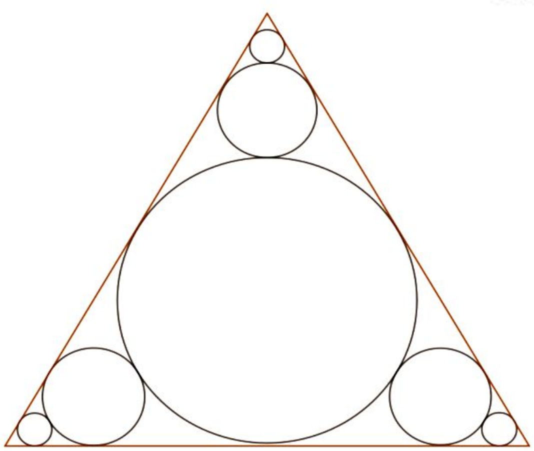
**Формальная постановка первой задачи.**

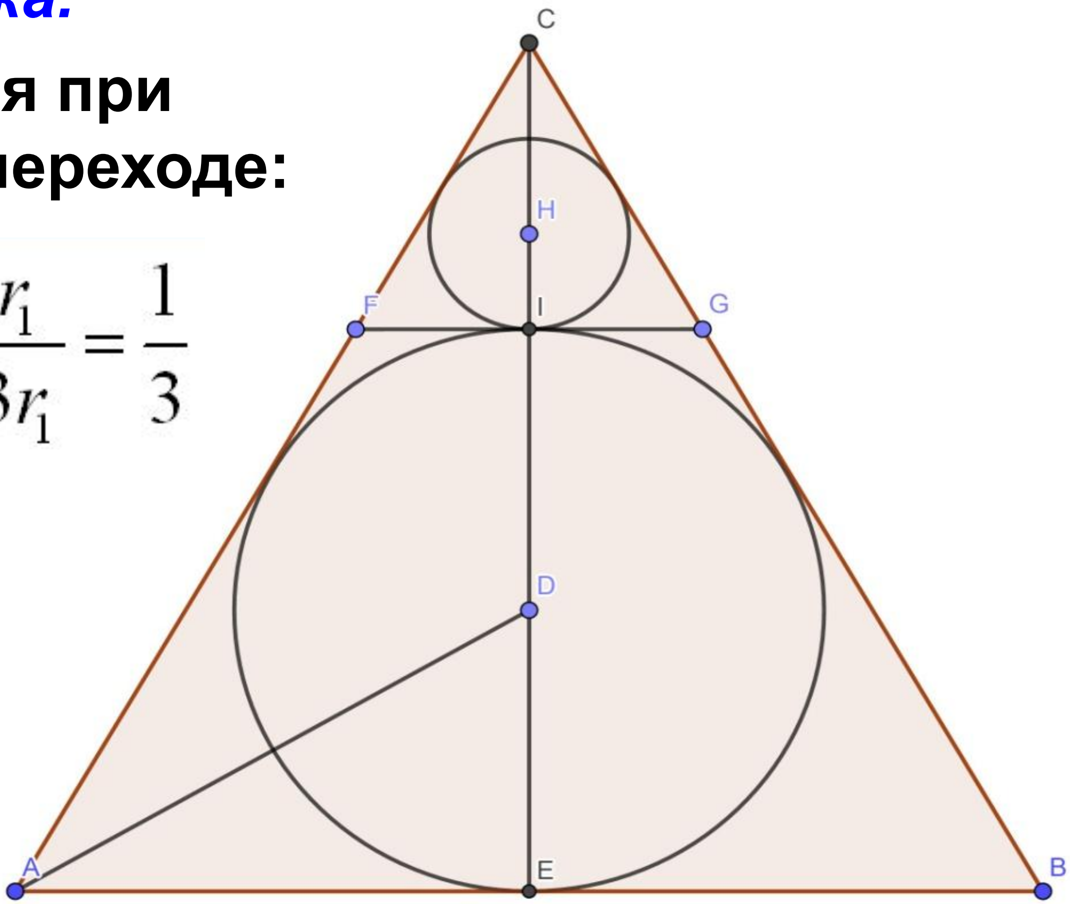
**Задача 1. Правильный треугольник с фрактальными кругами.**

***Вычислить отношение площадей вписанных в правильный треугольник фрактальных кругов к площади треугольника.***

**Коэффициент подобия при одном фрактальном переходе:**

$$k = \frac{CI}{CE} = \frac{r_1}{3r_1} = \frac{1}{3}$$



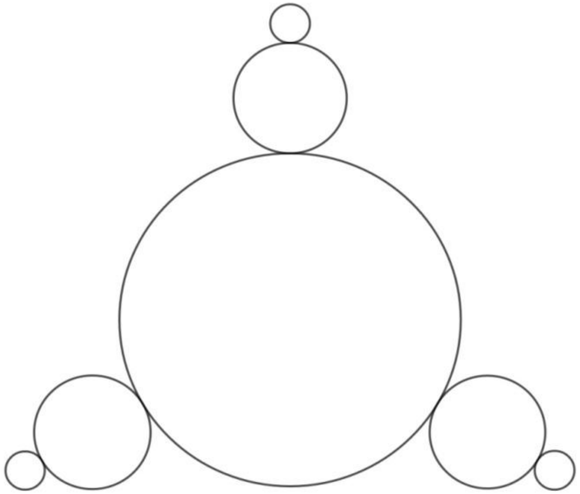


## Последовательность площадей фрактальных кругов

$$S_1;\ \frac{S_1}{3};\ \frac{S_1}{3\cdot 3^2};\ \frac{S_1}{3\cdot 3^4};\ \frac{S_1}{3\cdot 3^6};\ \ldots;\ \frac{S_1}{3\cdot 3^{2n-2}};\ \ldots$$

В этой последовательности первый член обособлен и не описывается общей формулой, поэтому

$$S_{kp3} = S_1 + \frac{b_1}{1-q} = S_1 + \frac{\left(\frac{S_1}{3}\right)}{1-\frac{1}{9}} = S_1 + \frac{3S_1}{8} = \frac{11S_1}{8}$$



$$\frac{S_{kp}}{S_{ABC}} = \frac{\left(\frac{11\pi a^2}{96}\right)}{\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{11\pi}{24\sqrt{3}} = \frac{11\pi\sqrt{3}}{72} \approx 0,831325$$

**Задача 1 решена**

**Выводы по Задаче 1.**

1. При заданном фрактальном дроблении круги заполнят площадь правильного треугольника почти на 83%.

**2. Фрактальный круг первого уровня занимает часть площади более 60%, а на остальные фрактальные круги приходится около 23% площади треугольника.**

3. Три фрактальных круга второго уровня занимают в три раза меньшую площадь, чем фрактальный круг первого уровня, то есть приблизительно 20% площади треугольника.

4. Три фрактальных круга третьего уровня занимают в девять раз меньшую площадь, чем фрактальные круги второго уровня, то есть приблизительно 2,2%, а фрактальные круги четвёртого уровня занимают площадь в 9 раз меньше, чем круги третьего уровня, то есть приблизительно 0,25% площади треугольника. Для фрактальных кругов пятого уровня доля площади треугольника составит приблизительно 0,03%.

**5. Площадь фрактальных кругов, начиная с третьего уровня, убывает по геометрической прогрессии со знаменателем 1/9, поэтому общая площадь фрактальных фигур существует и выражается сходящимся рядом геометрической прогрессии.**

# Метод индукции - от частного к общему

**От литературы к физике,**
**от физики к математике**

# Метод дедукции - от общего к частному

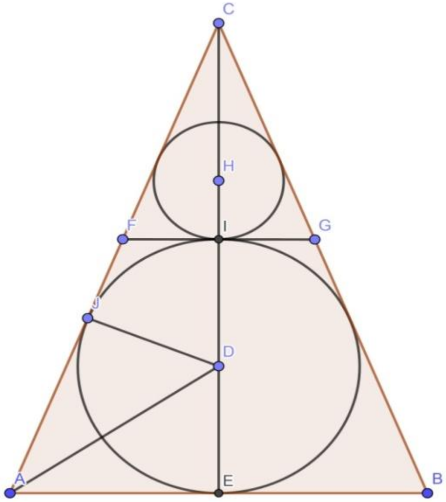
**От математики к физике и литературе,**
**математическое объяснение явлений**

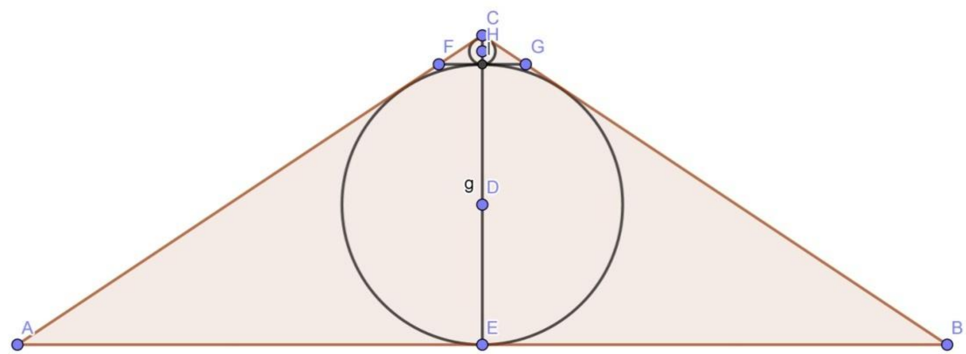
## Метод индукции (от частного к общему) в математике применяется реже метода дедукции (от общего к частному)

**Обоснование метода – математическая задача появилась из физики**

## Лемма 1.
## Коэффициент подобия окружностей, вписанных в угол

Коэффициент подобия двух касающихся друг друга окружностей, вписанных в угол $\varphi$, равен $k_{\varphi} = \dfrac{1-\sin\dfrac{\varphi}{2}}{1+\sin\dfrac{\varphi}{2}}$, считая меньшую окружность подобную большей.




**Пример-проверка: для угла 60 градусов (Задача 1)**

$$k_{60} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1-\sin\dfrac{60^0}{2}}{1+\sin\dfrac{60^0}{2}} = \frac{1-\sin 30^0}{1+\sin 30^0} = \frac{1-\dfrac{1}{2}}{1+\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Формальная постановка второй задачи

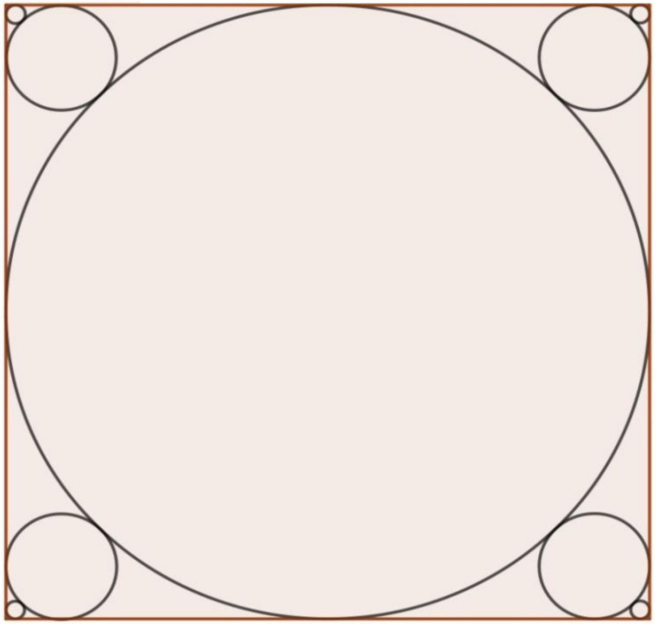
Задача 2. Квадрат с фрактальными кругами.

***Вычислить отношение площадей вписанных в квадрат фрактальных кругов к площади квадрата.***

$$k_{90}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{1-\sin 45^0}{1+\sin 45^0}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{4-4\sqrt{2}+2}{4-2}=3-2\sqrt{2}\approx 0{,}1716$$

**Последовательность площадей фрактальных кругов**

$$S_1;\ 4S_1\left(3-2\sqrt{2}\right)^2;\ 4S_1\left(3-2\sqrt{2}\right)^4;\ 4S_1\left(3-2\sqrt{2}\right)^6;\ldots;\ 4S_1\left(3-2\sqrt{2}\right)^{2n-2};\ldots$$



В этой последовательности первый член обособлен и не описывается общей формулой

**Результат решения задачи 2**

$$\frac{S_{kp4}}{S_{kv}}=\frac{\pi\left(3\sqrt{2}-2\right)}{8}\approx 0{,}88068$$

**Задача 2 решена**

**Выводы по Задаче 2.**

1. **При заданном фрактальном дроблении круги заполнят площадь квадрата почти на 83%, больше по сравнению с правильным треугольником.**

2. Фрактальный круг первого уровня занимает часть площади квадрата более 78%, а на остальные фрактальные круги приходится около 5% площади треугольника. Напомним, что в правильном треугольнике первый фрактальный круг занимал 60% площади треугольника, а на остальные фрактальные круги приходилось 23% площади треугольника.

**Получилось, что в квадрате очень мало площади приходится на фрактальные круги второго и более высокого уровней, для них «просто нет места», тогда как в правильном треугольнике такое место для фрактальных кругов второго уровня было.**

**Л.Н.Толстой увидел треугольники, но не рассмотрел квадратов**

## Метод дедукции (от общего к частному) в математике применяется чаще метода индукции (от частного к общему)

**Обоснование метода – физическая задача стала чисто математической**

**Задача 3. Правильный n-угольник с фрактальными кругами.**

***Вычислить отношение площадей вписанных в*** **правильный n-угольник** ***фрактальных кругов к площади правильного n-угольника.***

$$\varphi_n = 180^0 - \frac{360^0}{n}$$

**Частные случаи (индукционная проверка):**

$$\varphi_3 = 180^0 - \frac{360^0}{3} = 180^0 - 120^0 = 60^0$$

$$\varphi_4 = 180^0 - \frac{360^0}{4} = 180^0 - 90^0 = 90^0$$

$$\varphi_5 = 180^0 - \frac{360^0}{5} = 180^0 - 72^0 = 108^0$$

**Лемма 1. Коэффициент подобия окружностей, вписанных в угол**

# Коэффициент подобия между двумя соседними фрактальными вписанными окружностями в правильном n-угольнике

$$k_{\varphi n}=\frac{r_2}{r_1}=\frac{r_{m+1}}{r_m}=\frac{1-\sin\frac{\varphi_n}{2}}{1+\sin\frac{\varphi_n}{2}}=\frac{1-\sin\left(90^0-\frac{180^0}{n}\right)}{1+\sin\left(90^0-\frac{180^0}{n}\right)}=\frac{1-\cos\left(\frac{180^0}{n}\right)}{1+\cos\left(\frac{180^0}{n}\right)}=$$

$$=\frac{2\sin^2\left(\frac{90^0}{n}\right)}{2\cos^2\left(\frac{90^0}{n}\right)}=tg^2\left(\frac{90^0}{n}\right).$$

**Последовательность площадей фрактальных кругов**

$$S_1\,;nS_1tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right);nS_1tg^8\left(\frac{90^0}{n}\right);nS_1tg^{12}\left(\frac{90^0}{n}\right);\ldots;nS_1tg^{4n-4}\left(\frac{90^0}{n}\right);\ldots$$

В этой последовательности первый член обособлен и не описывается общей формулой

# Суммирование площадей фрактальных кругов

$$S_{kpn} = S_1 + \left( nS_1 tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right) + nS_1 tg^8\left(\frac{90^0}{n}\right) + nS_1 tg^{12}\left(\frac{90^0}{n}\right) + \ldots + nS_1 tg^{4n}\left(\frac{90^0}{n}\right) + \ldots \right) =$$

$$= S_1 + \frac{b_1}{1-q} = S_1 + \frac{nS_1 tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} = S_1\left( 1 + \frac{n \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right) =$$

**Результат решения Задачи 3**

$$= S_1\left( \frac{1 + (n-1) \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right) = \pi r_1^2 \left( \frac{1 + (n-1) \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right)$$

$$\frac{S_{kpn}}{S_{nyg}} = \frac{\pi r_1^2}{n r_1^2 tg\left(\frac{180^0}{n}\right)} \left( \frac{1 + (n-1) \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right) = \frac{\pi}{n \cdot tg\left(\frac{180^0}{n}\right)} \left( \frac{1 + (n-1) \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right)$$

**Задача 3 решена**

# Частная проверка полученного общего результата

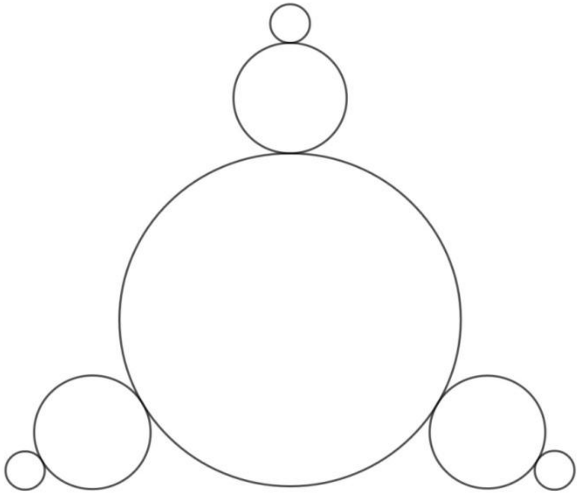
**Соответствие общей формулы частному случаю правильного треугольника**

Л.Н.Толстой видел треугольные листочки

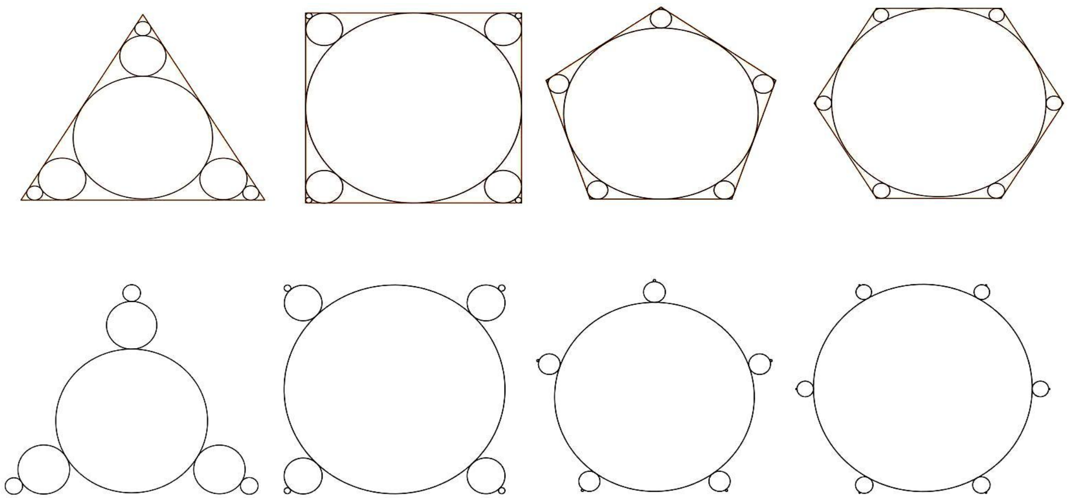
При n=3 получаем

$$\frac{S_{kp3}}{S_{3yg}} = \frac{\pi}{3\cdot tg60^0}\left(\frac{1+(3-1)\cdot tg^4 30^0}{1-tg^4 30^0}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1+2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\left(\frac{1+2\cdot\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{11}{8} = \frac{11\pi\sqrt{3}}{72}.$$



Общая формула, полученная в результате решения Задачи 3, привела к тому же самому результату, что и частная формула при решении Задачи 1.



$$\frac{S_{kpn}}{S_{nyg}} = \frac{\pi}{n \cdot tg\left(\frac{180^0}{n}\right)} \left( \frac{1 + (n-1) \cdot tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)}{1 - tg^4\left(\frac{90^0}{n}\right)} \right)$$

**Выводы**

1. На рисунках показаны схемы расположения фрактальных кругов в правильных многоугольниках.

2. Получена общая формула отношения площади кругов, как сходящейся геометрической прогрессии, к площади правильного многоугольника.

3. Фрактальные круги в правильных треугольниках наиболее часто и в основном встречаются в природе из-за наиболее медленного убывания геометрической прогрессии, а потому медленного роста в них давления от поверхностного натяжения.

Практическое применение (перспектива)

Распылитель жидкости (краски)

Структуры новых материалов

Математика фракталов

Лёд

Научное признание



Перспектива: от фрактальной конденсации к фрактальной кристаллизации

# Литературный вывод – ответ на главный вопрос исследования

## Почему именно треугольники увидел Л.Н.Толстой на листочках с росой?

## Получен математический ответ на литературный вопрос

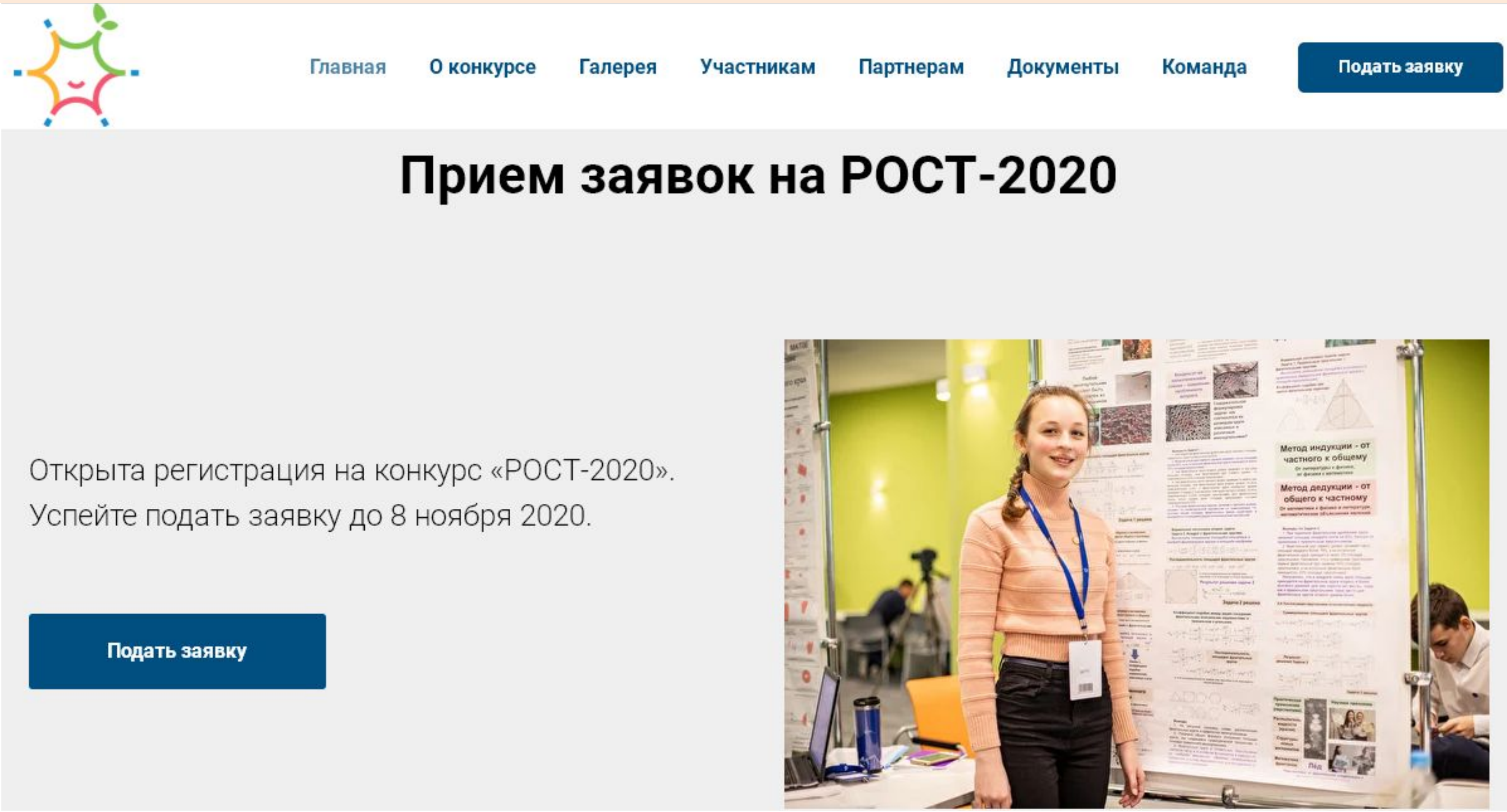
1. Круги заполнят площадь треугольного листика на 83%.

**2. Фрактальный круг первого уровня занимает часть площади листочка более 60%, а на остальные фрактальные круги приходится около 23% площади треугольника.**

3. Три фрактальных круга второго уровня занимают в три раза меньшую площадь, чем фрактальный круг первого уровня, то есть приблизительно 20% площади треугольника.

**Другие круги маленькие, не видны!**

**Я выступила на конкурсе РОСТ-ISEF в декабре 2019 года, заняла 3-е место на секции «Математика», уже подала заявку на конкурс этого года, однако…**




1) **Рекомендация жюри – выступить на секции «Литература».**
2) **Я увлеклась физикой и уже год изучаю работы специалистов РКК «Энергия» по тросовым космическим системам, предлагаю новое, подготовила заявку на изобретение.**