Практика по получению первичных профессиональных умений и навыков (Профессиональный семинар)

Руководитель семинара:

д.э.н., проф. Е.Ю. Дорохина

Форма отчетности

Эссе на тему «Обоснование проекта с использованием методов математического моделирования»

Объем 4-5 страниц.

Пример обоснования проекта

Основными ресурсами для добычи топлива являются электроэнергия, фонд заработной платы и трудовые ресурсы. Все они строго лимитированы. Добываемых видов топлива два – торф (открытые разработки) и уголь (подземная добыча). В рамках выделенных объемов ресурсов план добычи может быть любой. **Цель проекта** – максимум теплотворной способности добытого топлива (обеспечить теплом поселок горняков).

Пример обоснования проекта

Вид ресурсов	Единица измерения	Количе-ство ре-сурсов	Норма затрат ресурсов на добычу 1 тонны	
			торфа	угля
Фонд за-работной платы	у.е.	20000	0,05	0,5
Электро-энергия	кВт.ч.	180000	1,1	1
Трудовые ресурсы	чел.-ч.	32000	0,225	0,25
Коэффициенты перевода торфа и угля в тонны условного топлива			0,25	1,2

Пример обоснования проекта

Неизвестными в задаче являются добыча торфа и угля (в физических тоннах). Обозначим их x_1 и x_2 соответственно. Задача ставится следующим образом: найти неотрицательные значения переменных x_1 и x_2, максимизирующие суммарную добычу условного топлива при ограничениях на выделенные лимиты ресурсов.

Пример обоснования проекта

Модель задачи будет выглядеть так

$0{,}05x_1+0{,}5x_2 \le 20000;$ (1.1)

$1{,}1\ x_1+\ x_2 \le 180000;$ (1.2)

$0{,}225x_1+\ 0{,}25\ x_2 \le 32000;$ (1.3)

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;$ (1.4) - (1.5)

$0{,}25\ x_1+1{,}2\ x_2 \to max.$ (1.6)

Пример обоснования проекта

Совокупность выражений (1.1) - (1.6) представляет собой **математическую модель** задачи, данные таблицы с сопровождающими ее пояснениями – **экономическую модель**, т.е. описание основных сторон деятельности объекта, абстрагируясь от множества второстепенных его свойств.

Пример обоснования проекта

Экономико-математическая модель – совокупность математических выражений и экономическое описание входящих в них величин. Совокупность математических выражений (1.1) - (1.6) состоит из критерия оптимальности (1.6) и системы ограничений (1.1) - (1.5).

Пример обоснования проекта

В свою очередь, в последней можно выделить **ограничения неотрицательности** (1.4) - (1.5), показывающие, какие значения могут принимать переменные, а также **основные ограничения** (1.1) - (1.3), указывающие, какие именно преобразования можно проводить с переменными.

Пример обоснования проекта

Система ограничений определяет **множество допустимых значений переменных**, из которых с помощью критерия оптимальности и отыскиваются наилучшие (по данному критерию) значения.

Пример обоснования проекта

Обозначим:

i – индекс ресурсов ($i = 1, 2, ..., m$);

j – индекс продукции ($j = 1, 2, ..., n$);

b_i – наличие i-го ресурса;

a_{ij} – норма затрат i-го ресурса на производство единицы j-й продукции;

p_j – эффективность единицы продукции j-го вида;

x_j – искомый объем производства j-й продукции.

Пример обоснования проекта

В данных обозначениях задача запишется следующим образом. Найти значения переменных x_j, максимизирующие целевую функцию вида

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to max \; ; \qquad (1.7)$$

Пример обоснования проекта

при выполнении ограничений на использование ресурсов:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,\ m) \quad (1.8)$$

и неотрицательности переменных:

$$x_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n). \qquad (1.9)$$

Пример обоснования проекта

Выражение (1.7) максимизирует совокупный эффект от всего объема выпущенной продукции всех видов. Выражение (1.8) означает, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство продукции (всего объема по всем видам) не превосходит выделенного лимита. Выражение (1.9) означает неотрицательность выпусков продукции.

Пример обоснования проекта

Выражение (1.7) максимизирует совокупный эффект от всего объема выпущенной продукции всех видов. Выражение (1.8) означает, что для любого из ресурсов его суммарный расход на производство продукции (всего объема по всем видам) не превосходит выделенного лимита. Выражение (1.9) означает неотрицательность выпусков продукции.

Пример обоснования проекта

Модель (1.7) - (1.9) справедлива для любого количества видов ресурсов и продукции, для самых разнообразных конкретных численных значений лимитов ресурсов b_i и норм затрат ресурсов a_{ij} . Использование более общего термина “**продукция**” вместо конкретного “топливо” превращает задачу по отысканию оптимального плана добычи топлива в задачу по отысканию **оптимального плана производства любой продукции** .

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Соизмерение различных видов продукции через натуральные показатели возможно лишь в ограниченном числе случаев (условное топливо, соизмерение минеральных удобрений через содержание действующего начала и т.п.). Поэтому в качестве критериального показателя используются, как правило, различного рода стоимостные величины, например, **прибыль**.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Пусть p_j – прибыль от производства единицы продукции *j*-го вида (удельная прибыльность *j*-й продукции).

Тогда модель (1.7) - (1.9) есть модель задачи на максимум прибыли.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Все эти варианты одинаковы по размерам используемых ресурсов (заданы величинами b_i), т.е. одинаковы по затратам, но различны по своим результатам – по размерам прибыли.

В модели (1.7) - (1.9) средством оптимизации является отбор в план наиболее выгодных видов продукции.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

При наличии **нескольких взаимозаменяемых способов (технологий)** производства одного и того же вида продукции оптимизация возможна и за счет выбора для каждой продукции наиболее выгодных способов ее производства.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Дополнительно введем следующие обозначения:

s – индекс технологического способа производства j-й продукции $(s = 1,2,..., r_j)$;

x_j^s – искомый объем производства j-й продукции s-м технологическим способом;

a_{ij}^s – норма затрат i-го ресурса на производство единицы j-й продукции s-м способом;

x_j^s – прибыльность j-й продукции, произведенной s-м способом.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

критерий оптимальности – максимум прибыли

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} p_j^s x_j^s \to \max;$$

ограничения на использование ресурсов

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j^s \le b_i; \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

ограничения на неотрицательность выпуска

$$x_j^s \geq 0 \qquad (j=1,2,...,n);$$

$$(s=1,2,...,r_j).$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Интерпретируем наш проект как задачу максимизации прибыли от добычи топлива одного вида (например, угля) двумя различными технологическими способами: открытым (карьер) и подземным (шахта). При практической близости норм затрат электроэнергии (1,1 и 1) и трудовых ресурсов (0,225 и 0,25) в двух столбцах два технологических способа отличаются главным образом затратами заработной платы.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Интерпретируем наш проект как задачу максимизации прибыли от добычи топлива одного вида (например, угля) двумя различными технологическими способами: открытым (карьер) и подземным (шахта). При практической близости норм затрат электроэнергии (1,1 и 1) и трудовых ресурсов (0,225 и 0,25) в двух столбцах два технологических способа отличаются главным образом затратами заработной платы.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

В процессе составления плана производства приходится учитывать не только ограниченность выделяемых ресурсов, но и задания по выпуску продукции (например, договорные обязательства). Введем в наш первоначальный пример плановые задания по добыче 90 тыс. т торфа и 30 тыс. т угля. Модель (1.1) - (1.6) дополнится ограничениями :

$$x_1 \geq 90000; \qquad (1.10)$$

$$x_2 \geq 30000. \qquad (1.11)$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Введем обозначение:

d_j – план выпуска j-й продукции. С учетом ранее введенных обозначений численной модели (1.1) - (1.6), (1.10) - (1.11) будет соответствовать модель в общем виде:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j x_j \rightarrow max ;$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,...,m);$$

$$x_j \ge d_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,...,n).$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Если в задаче (1.7) - (1.9) оптимизация шла за счет отбора наиболее выгодных видов продукции, то в последней модели свобода выбора существенно снижается. Действительно, в любом допустимом плане выпуска величина каждого x_j в основном складывается из обязательной фиксированной величины планового выпуска d_j . Оптимизация же, т.е. выбор различных вариантов идет лишь за счет сверхплановых выпусков продукции того или иного вида.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Пусть $x_j^{'}$ - искомый сверхплановый выпуск j-й продукции. Тогда $x_j = d_j + x_j^{'}$. Подставив это выражение в модель, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j d_j + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^{'} \rightarrow \max;$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m);$$

$$d_j + x_j' \ge d_j \ge 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

Уменьшив правую и левую части последнего выражения на d_j, получим $x_j' \ge 0$ – условие неотрицательности вновь введенных переменных.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Общая величина прибыли от выпуска продукции в строгом соответствии с планом постоянна и может быть получена прямым счетом. Иными словами,

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \, d_j = const$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

Таким образом, максимизация общего объема прибыли зависит лишь от максимизации прибыли за счет сверхпланового

выпуска, т.е. величины $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$'.

Учитывая, что $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} d_j = const$,

*

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

обозначим через $b_i{}' = b_i - \Sigma\, a_{ij}\, d_j$ остаток i-го ресурса после строгого выполнения плана. Тогда вся задача сведется к задаче по максимизации прибыли от сверхпланового выпуска продукции за счет свободного остатка ресурсов, которой будет соответствовать модель

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\, x_j{}' \rightarrow max\ ;$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j' \leq b_i' \qquad (i = 1,2,...,m);$$

$$x_j' \geq 0. \qquad (j = 1,2,...,n).$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ПРИБЫЛИ

С учетом технологических способов

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r_j} p_j^s x_j^s \to \max; \qquad (1.12)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r_j} a_{ij}^s x_j^s \le b_i, \qquad (i = 1, \ldots, m); \qquad (1.13)$$

$$\sum_{s=1}^{r_j} x_j^s \ge d_j, \qquad (j = 1, \ldots, n); \qquad (1.14)$$

$$x_j^s \ge 0, \qquad (j = 1, \ldots, n); \quad (s = 1, \ldots, r_j). \qquad (1.15)$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МИНИМУМ ЗАТРАТ

c_j – себестоимость единицы j-й продукции.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to min \; ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,...,m);$$

$$x_j \ge 0 \; . \qquad (j = 1,2,...,n).$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МИНИМУМ ЗАТРАТ

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r_j} c_j^s x_j^s \to \max; \qquad (1.16)$$

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{r_j} a_{ij}^s x_j^s \le b_i, \qquad (i = 1, \ldots, m); \qquad (1.17)$$

$$\sum_{s=1}^{r_j} x_j^s \ge d_j, \qquad (j = 1, \ldots, n); \qquad (1.18)$$

$$x_j^s \ge 0, \qquad (j = 1, \ldots, n); \quad (s = 1, \ldots, r_j). \qquad (1.19)$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Несколько изменим условный проект, оставив те же числа. Пусть теперь это будет задача о добыче не торфа и угля, а железной руды и угля. В этом случае использование натуральных критериев оптимальности, подобных максимуму производства условного топлива, т.е. непосредственно соизмеряющих разнородную продукцию, невозможно. Соизмерение возможно лишь в стоимостных единицах (затраты, прибыль, цены и т. п.).

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Несколько изменим условный проект, оставив те же числа. Пусть теперь это будет задача о добыче не торфа и угля, а железной руды и угля. В этом случае использование натуральных критериев оптимальности, подобных максимуму производства условного топлива, т.е. непосредственно соизмеряющих разнородную продукцию, невозможно. Соизмерение возможно лишь в стоимостных единицах (затраты, прибыль, цены и т. п.).

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Оптимизационная постановка задачи возможна и без непосредственного соизмерения различной продукции. Пусть добыча железной руды и угля ориентирована исключительно на доменное производство, по условиям которого соотношение данных видов сырья при выплавке чугуна должно составлять 2:1.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Таким образом, добыча сырья ведется в строго заданном ассортиментном соотношении, т.е. как бы комплектами, в каждый из которых входит 2 т железной руды и 1 т угля. Пусть добыча составила 50 тыс. т руды и 20 тыс. т угля (x_1=50000 и x_2=20000). Разделив значения переменных на ассортиментные коэффициенты, получим

50000/2=25000; 20000/1= 20000.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Первая из величин означает, что добытой руды хватит на 25 тыс. комплектов. Но выпуск продукции в “комплектах” составит 20 тыс., потому что он задается минимальной (по видам продукции) дробью.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Введем новое неизвестное z – искомое количество произведенных комплектов продукции. Тогда модель можно записать так: $z \rightarrow max$;

$$0{,}05x_1 + 0{,}5x_2 \leq 20000;$$

$$1{,}1x_1 + x_2 \leq 180000;$$

$$0{,}225x_1 + 0{,}25x_2 \leq 32000;$$

$$0{,}5x_1 \geq z\ ;\ \ x_2 \geq z;$$

$$x_1 \geq 0;\ \ x_2 \geq 0;\ z \geq 0.$$

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Это модель на максимум комплектов. Новые ограничения $0{,}5x_1 \geq z$ и $x_2 \geq z$ связывают новое неизвестное z с неизвестными x_1 и x_2 и являются условиями по формированию комплектов. Целевая функция вида $z \to max$ “гонит” вверх значение z до тех пор, пока оно не сравняется с левой частью какого-либо из ограничений по формированию комплектов.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

Запишем модель в общем виде, дополнительно введя обозначения

k_j – ассортиментный коэффициент *j*-й продукции, показывающий, какое количество продукции *j*-го вида входит в комплект.

Ассортиментное соотношение $k_1 : k_2 :\ldots: k_{n-1} : k_n$ задает пропорции выпуска всех видов продукции при любых значениях объемов производства.

ЦЕЛЬ ПРОЕКТА – МАКСИМУМ ВЫПУСКА ПРОДУКЦИИ В ЗАДАННОМ АССОРТИМЕНТНОМ СООТНОШЕНИИ

$$z \longrightarrow max \;;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le b_i \qquad (i = 1,2,\ldots,m);$$

$$x_j \,/\, k_j \le z; \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$

$$x_j \ge 0 \quad . \qquad (j = 1,2,\ldots,n).$$