

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Известно, что с помощью дифференциальных уравнений можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, и др. Конкретная прикладная задача может приводить к дифференциальному уравнению любого порядка, или к системе уравнений любого порядка. При этом известно, что произвольное дифференциальное уравнение p -го порядка

$$y^{(p)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(p-1)}) \quad (1)$$

при помощи замены $y^{(k)} \equiv y_k(x)$ можно свести к системе p уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y'_k(x) = y_{k+1}(x), \\ y'_{p-1} = f(x, y_0, y_1, \dots, y_{p-1}) \end{cases} \quad 0 \leq k \leq p-2 \quad (2)$$

где $y_0(x) \equiv y(x)$. Используя алгоритм перехода от (1) к (2), можно любую систему любого порядка свести к системе уравнений 1-го порядка.

$$y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{p^2}{x^2}\right)y = 0$$

Покажем такое преобразование на примере уравнения Бесселя:

Предполагая тождественную замену $y_1(x) \equiv y(x)$ представим систему дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} y'_1(x) = y_2(x) & \text{тогда } y_1''(x) = y_2'(x) \\ y'_2(x) = \left(\frac{p^2}{x^2} - 1\right)y_1(x) - \frac{y_2(x)}{x} \end{cases}$$

Аналогично произвольную систему дифференциальных уравнений любого порядка можно заменить некоторой эквивалентной системой уравнений первого порядка. Следовательно, алгоритмы численного решения достаточно реализовать для решения системы дифференциальных уравнений первого порядка.

Поэтому в дальнейшем будем в основном работать с системой уравнений 1-го порядка следующего вида: $y'_k(x) = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_p) \quad k = 1, 2, \dots, p$, (3)

которую будем записывать в сокращённой векторной форме:

$$y' = f(x, y), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (3')$$

Известно, что система уравнений (3) и (3') имеет множество решений, которые в общем случае зависят от p параметров $c = (c_1, \dots, c_p)$, что можно записать в виде: $y = y(x, c)$. Для выделения единственного решения необходимо наложить p дополнительных условий.

Различают три типа задач для систем дифференциальных уравнений:

- задачи Коши;
- краевые задачи;
- задачи на собственные значения.

Задача Коши (или задача с начальными данными) предполагает дополнительные условия вида: $y_k(x_0) = y_{0,k}, \quad k = 1, \dots, p$ (4)

т.е. в точке x_0 задаются значения всех функций системы уравнений (3). Условие (4) можно истолковать как задание начальной точки $(x_0, y_{0,1}, \dots, y_{0,p})$ искомой интегральной кривой в $p+1$ -мерном пространстве (x_0, y_1, \dots, y_p) . Решение системы уравнений (3) обычно требуется найти на отрезке $[x_0, X]$.

Краевая задача - это задача отыскания частного решения системы ОДУ на отрезке $a \leq x \leq b$, в которой дополнительные условия налагаются на значения функции $y_k(x)$ более чем в одной точке этого отрезка.

Задача на собственные значения. Кроме искомым функций и их производных в уравнение входят дополнительно m неизвестных параметров $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, которые являются собственными значениями. Для единственности решения на некотором интервале необходимо задать $p+m$ граничных условий.

Методы решения дифференциальных уравнений можно классифицировать на **точные, приближенные и численные.**

Точные методы позволяют выразить решения дифференциальных уравнений либо через элементарные функции, либо с помощью квадратур от элементарных функций. Точные методы решения уравнений (3), (4) изучаются в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приближенными будем называть методы, в которых решение $y(x)$ получается как предел некоторой последовательности $y_n(x)$, при этом $y_n(x)$ выражаются либо в аналитическом виде с помощью элементарных функций, либо с помощью квадратур этих элементарных функций.

Численные методы представляют собой алгоритмы вычисления приближенных значений искомой функции $y(x)$ в узлах некоторой сетки значений аргумента x_1, \dots, x_n . Основным недостатком численных методов является то, что они позволяют найти частное решение, например решение задачи Коши, но не общее решение $y = y(x, c)$ уравнения (3). Этот недостаток компенсируется тем, что численные методы универсальны и могут быть использованы для решения широкого класса дифференциальных уравнений.

В большинстве случаев необходимость численного решения систем дифференциальных уравнений возникает в случае, когда *аналитическое решение* найти либо невозможно, либо нерационально, а *приближенное решение* (в виде набора интерполирующих функций) не дает требуемой точности.

Численные методы могут быть использованы только для задач, решение которых существует и единственно, т.е. если задача *корректно* поставлена. Однако условие корректности необходимо, но не достаточно для численного решения задачи. Необходимо ещё, чтобы задача была *хорошо обусловлена*, т.е. малые шевеления в начальных (входных) данных приводили к малым изменениям в решениях. Если это условие не выполнено, то считается, что задача *плохо обусловлена (слабо устойчива)*, т.е. небольшие погрешности входных данных или метода могут сильно исказить решение.

Приведём простой пример плохо обусловленной задачи. Необходимо численно найти решение следующей задачи:

$$y' = y \quad 0 \leq x \leq 100 \quad y(0) = y_0 = 0 \quad (5)$$

Задача (5) имеет точное общее решение: $y = y_0 e^x$ и частное $y \equiv 0$, входным значение для задачи является параметр y_0 . Плохая обусловленность задачи (5) выражается в том, что если пошевелить входной параметр, сделать его равным не нулю, а 10^{-6} , то решение в точке 100 сильно изменится, т.е. $y(100) = 10^{-6} \cdot 2,718^{100} = 2,688 \cdot 10^{37}$.

Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$. (6)

Нормальная форма дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, (7)

где $y=y(x)$ - неизвестная функция, подлежащая определению,

$f(x,y)$ - правая часть дифференциального уравнения в нормальной форме, равная первой производной функции $y(x)$. В функцию $f(x,y)$ помимо аргумента x входит и сама неизвестная функция $y(x)$.

Пример:

$x \cdot y' - (x^2 - 1) \cdot y = 0$ - общий вид дифференциального уравнения первого порядка,

$y' = \frac{x^2-1}{x} \cdot y$ - нормальная форма этого же уравнения.

Если неизвестная функция y зависит от одного аргумента x , то дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$, называется **обыкновенным** дифференциальным уравнением. Если функция y зависит от нескольких аргументов, то такое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в **частных производных**. Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, является семейство функций $y=y(x,c)$ ([рис. 1](#)):

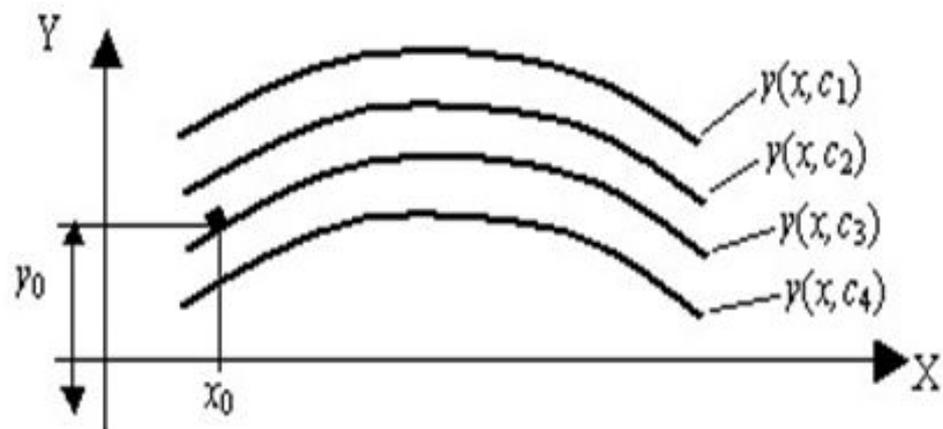


Рис. 1. Графическая иллюстрация решения ОДУ

При решении прикладных задач ищут частные решения дифференциальных уравнений. Выделение частного решения из семейства общих решений осуществляется

с помощью задания начальных условий: $y|_{x=x_0} = y_0$, (8)

т.е. начальной точки с координатами (x_0, y_0) .

Нахождение частного решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$,

удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=x_0} = y_0$, называется задачей Коши.

В численных методах задача Коши ставится следующим образом: найти табличную функцию $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$, которая удовлетворяет заданному дифференциальному уравнению (7) и начальному условию (8) на отрезке $[a, b]$ с шагом h , то есть найти таблицу

i	x	y
0	x_0	y_0
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
3	x_3	y_3
...
n	x_n	y_n

Здесь

h - шаг интегрирования дифференциального уравнения,

$a=x_0$ - начало участка интегрирования уравнения,

$b=x_n$ - конец участка,

$n=(b-a)/h$ - число шагов интегрирования уравнения.

На графике ([рис. 2](#)) решение задачи Коши численными методами представляется в виде совокупности узловых точек с координатами (x_i, y_i) , $i = \overline{1, n}$.

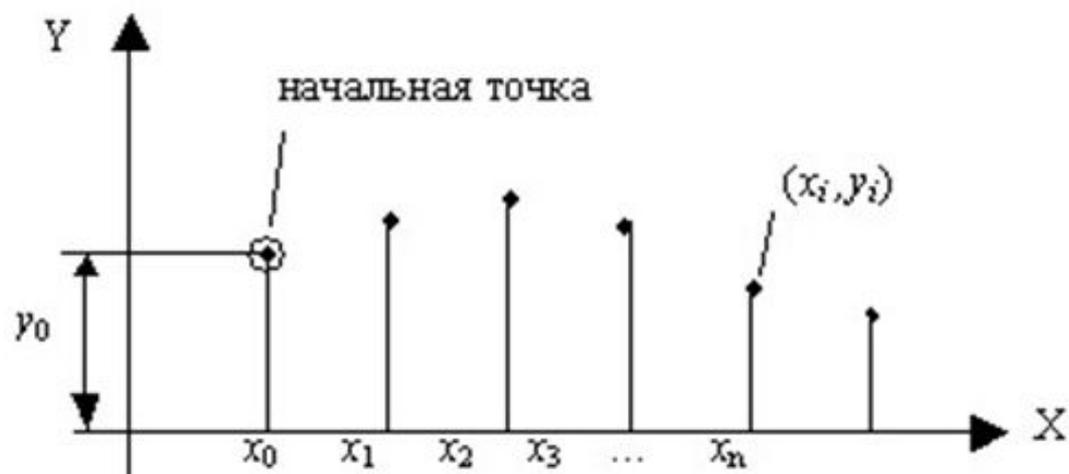


Рис. 2. Графическая иллюстрация решения задачи Коши

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна на множестве точек $\{x_0 \leq x \leq X, -\infty < y < \infty\}$. Предположим также, что она удовлетворяет условию Липшица: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ для всех $x_0 \leq x \leq X$ и произвольных y_1, y_2 , где L - некоторая константа (постоянная Липшица). Тогда для каждого начального значения y_0 существует единственное решение $y(x)$ задачи Коши, определенное на отрезке $[x_0, X]$.

Геометрически задача интегрирования дифференциальных уравнений состоит в нахождении интегральных кривых, которые в каждой своей точке имеют заданное направление касательной. Совокупность решений образует поле направлений. Заданием начального условия мы выделяем из семейства решений ту единственную кривую, которая проходит через фиксированную точку (x_0, y_0) .

Методы Рунге - Кутта

Наиболее эффективными и часто встречаемыми методами решениями задачи Коши являются методы Рунге - Кутта. Они основаны на аппроксимации искомой функции $y(x)$ в пределах каждого шага многочленом, который получен при помощи разложения функции $y(x)$ в окрестности шага h каждой i -ой точки в ряд Тейлора:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) + \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(x_i) + \dots \quad (9)$$

Усекая ряд Тейлора в различных точках и отбрасывая правые члены ряда, Рунге и Кутт получали различные методы для определения значений функции $y(x)$ в каждой узловой точке. Точность каждого метода определяется отброшенными членами ряда.

Метод Рунге - Кутта 1-го порядка (метод Эйлера, метод ломаных)

Отбросим в ур.(9) члены ряда, содержащие h^2, h^3, h^4 :

Тогда $y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i)$. Учитывая, что $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, получим формулу Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (10)$$

Численный метод называется **явным**, если вычисление решения в следующей точке y_{i+1} осуществляется по явной формуле. Метод называется **одношаговым**, если вычисление решения в следующей точке y_{i+1} производится с использованием только одного предыдущего значения y_i . Метод Эйлера является явным одношаговым методом.

Так как точность методов Рунге-Кутты определяется отброшенными членами ряда (9), то точность метода Эйлера на каждом шаге составляет $\approx h^2$.

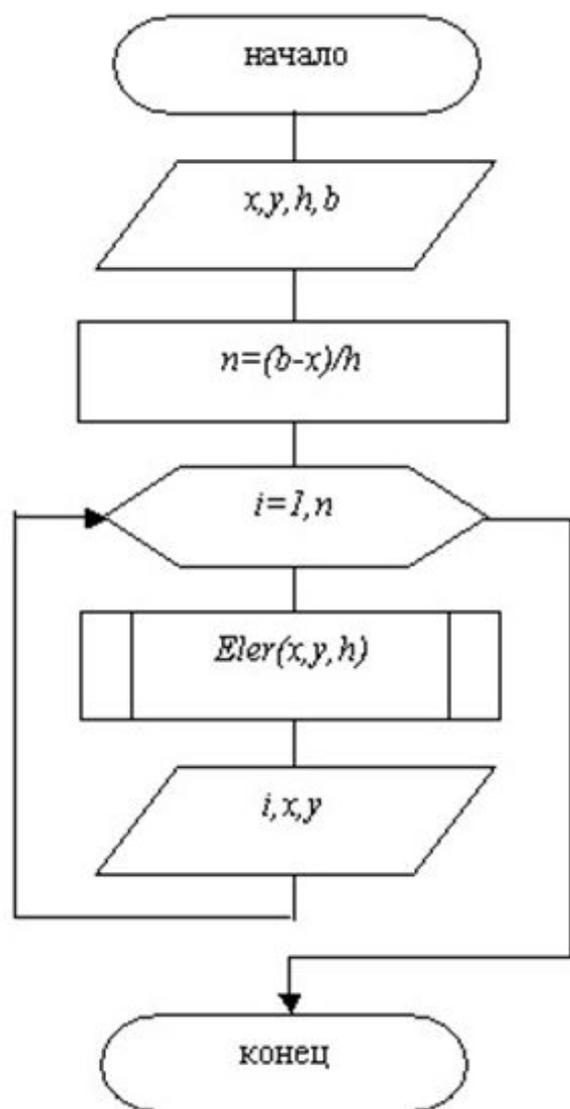
Алгоритм метода Эйлера можно построить в виде двух программных модулей: основной программы и подпрограммы ELER, реализующей метод. Здесь

(x,y)-при вводе начальная точка, далее текущие значения табличной функции,

h-шаг интегрирования дифференциального уравнения,

b-конец интервала интегрирования.

Основная программа



Подпрограмма ELER

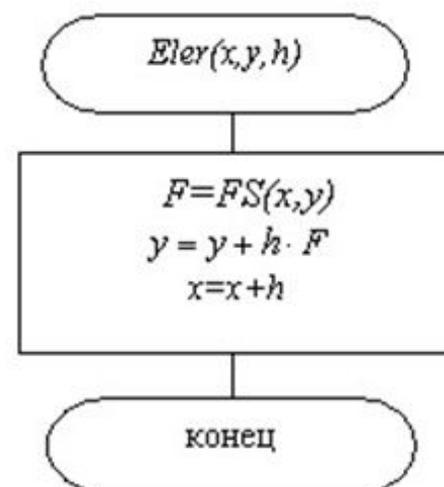


Рис. 3. Блок-схема алгоритма метода Эйлера

Рассмотрим геометрический смысл метода Эйлера. Его формула имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \text{ где } f(x_i, y_i) = y'(x_i) = \operatorname{tg} \alpha_i.$$

Тогда формула Эйлера принимает вид: $y_{i+1} = y_i + h \cdot \operatorname{tg} \alpha_i$, где $\operatorname{tg} \alpha_i$ - тангенс угла наклона касательной к искомой функции $y(x)$ в начальной точке каждого шага.

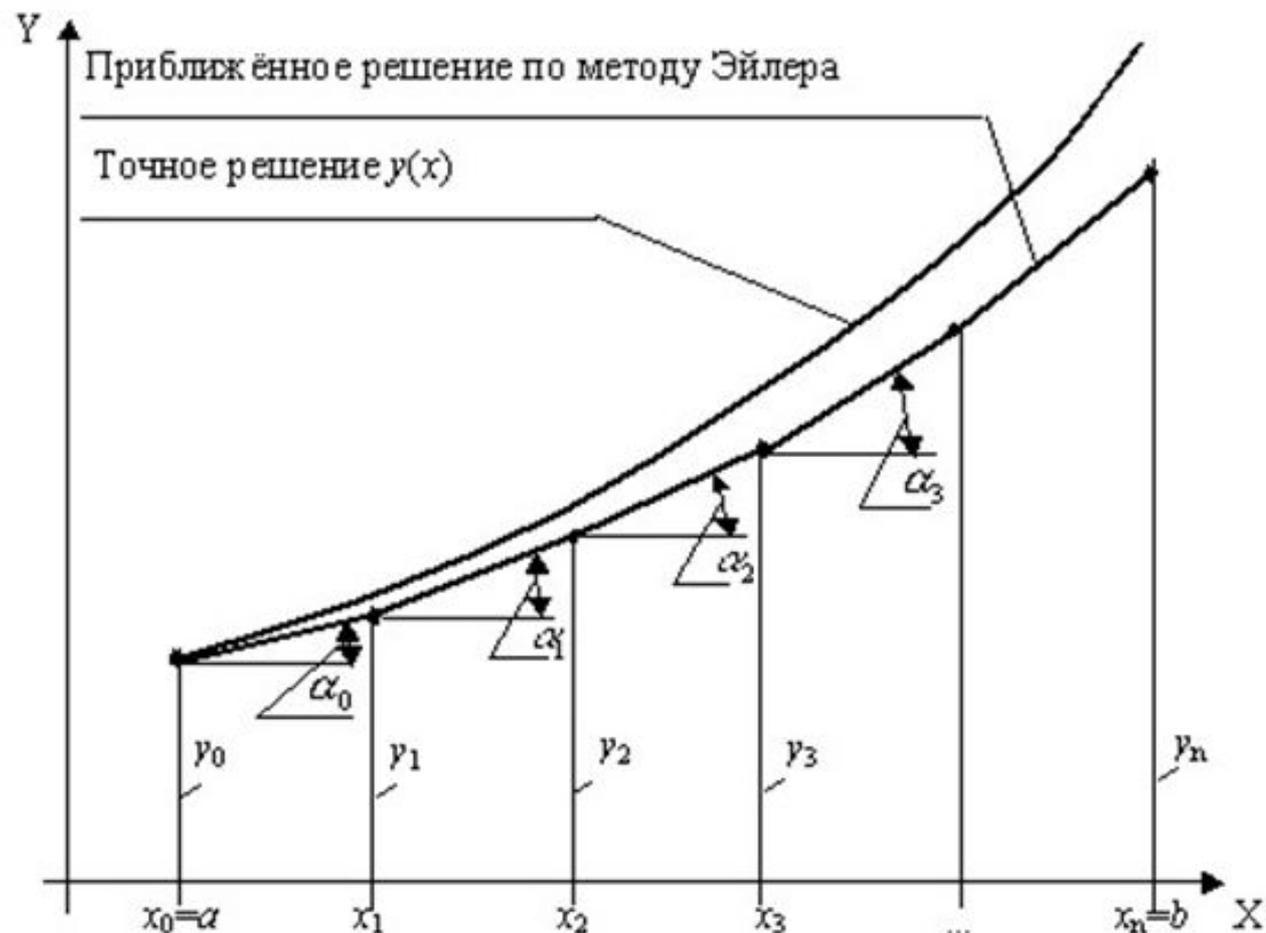


Рис. 4. Геометрический смысл метода Эйлера

В результате в методе Эйлера на графике ([рис 4](#)) вся искомая функция $y(x)$ на участке $[a, b]$ аппроксимируется ломаной линией, каждый отрезок которой на шаге h линейно аппроксимирует искомую функцию. Поэтому метод Эйлера получил еще название **метода ломаных**.

В методе Эйлера наклон касательной в пределах каждого шага считается постоянным и равным значению производной в начальной точке шага x_i . В действительности производная, а, значит, и тангенс угла наклона касательной к кривой $y(x)$ в пределах каждого шага меняется. Поэтому в точке x_i+h наклон касательной не должен быть равен наклону в точке x_i . Следовательно, на каждом шаге вносится погрешность.

Первый отрезок ломаной действительно касается искомой интегральной кривой $y(x)$ в точке (x_0, y_0) . На последовательных же шагах касательные проводятся из точек (x_i, y_i) , подсчитанных с погрешностью. В результате с каждым шагом ошибки накапливаются. Поэтому говорят о локальной и глобальной погрешностях метода.

Локальной погрешностью метода называется величина $l_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1}$. Найдем величину локальной погрешности метода Эйлера:

$$l_i = y(x_{i+1}) - y_{i+1} = y(x_i) + hy'(x_i) + O(h^2) - y_i - hf(x_i, y_i) = O(h^2),$$

при условии, что $y(x_i) = y_i$. Другими словами погрешность l_i – это погрешность, которую допускает за один шаг метод, стартующий с точного решения.

Глобальной погрешностью (или просто погрешностью) численного метода называют сеточную функцию ε_h со значениями $\varepsilon_i = y(x_i) - y_i$ в узлах. В качестве меры абсолютной погрешности метода примем величину $E(h) = \max_{0 \leq i \leq N} |y(x_i) - y_i|$.

Можно показать, что для явных одношаговых методов из того, что локальная погрешность имеет вид $l_i = Ch^{p+1}$, следует, что $E(h) = Mh^p$, где C и M - некоторые константы. Таким образом, метод Эйлера является методом **первого порядка точности**. Для нахождения решения задачи Коши с заданной точностью ε требуется найти такое приближенное решение y^h , для которого величина глобальной погрешности $E(h) \leq \varepsilon$. Так как точное решение задачи неизвестно, погрешность оценивают с помощью правила Рунге.

Правило Рунге оценки погрешностей. Для практической оценки погрешности проводят вычисления с шагами h и $h/2$. За оценку погрешности решения, полученного

с шагом $h/2$, принимают величину, равную $\max_i \left| \frac{y_i^h - y_{2i}^{h/2}}{2^p - 1} \right|$, где p - порядок метода.

Основной недостаток метода Эйлера - систематическое накопление ошибок. Поэтому метод Эйлера рекомендуется применять для решения дифференциальных уравнений при малых значениях шага интегрирования h .

Метод Рунге - Кутта 2-го порядка (метод Эйлера-Коши)

Метод Эйлера обладает медленной сходимостью, поэтому чаще применяют методы более высокого порядка точности. Отбросим в ур.(9) члены ряда, содержащие h^3, h^4, h^5 :

Тогда

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} \cdot y''(x_i). \quad (11)$$

Чтобы сохранить член ряда, содержащий h^2 , надо определить вторую производную $y''(x_i)$. Ее можно аппроксимировать разделенной разностью 2-го порядка:

$$y''(x_i) = \frac{\Delta y'}{\Delta x} = \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h}$$

Подставляя это выражение в (11), получим:

$$\begin{aligned} y(x_i + h) &= y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h}{2} \cdot \frac{y'(x_i + h) - y'(x_i)}{h} = \\ &= y(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i) + \frac{h}{2} y'(x_i + h). \end{aligned}$$

Окончательно, модифицированная или уточненная формула Эйлера имеет вид:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (12)$$

Как видно, для определения функции $y(x)$ в точке $i+1$ необходимо знать значение правой части дифференциального уравнения $f(x_{i+1}, y_{i+1})$ в этой точке, для определения которой необходимо знать предварительное значение y_{i+1} .

Для определения предварительного значения y_{i+1} воспользуемся формулой Эйлера. Тогда все вычисления на каждом шаге по модифицированной или уточненной формуле Эйлера будем выполнять в два этапа:

На первом этапе вычисляем предварительное значение $y_{i+1}^{\text{Э}}$ по формуле Эйлера

$$y_{i+1}^{\text{Э}} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

На втором этапе уточняем значение y_{i+1} по модифицированной или уточненной формуле Эйлера

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}f(x_{i+1}, y_{i+1}^{\text{Э}}).$$

Точность метода определяется отброшенными членами ряда Тейлора (9), т.е. точность уточненного или модифицированного метода Эйлера на каждом шаге $\approx h^3$.

Рассмотрим геометрический смысл модифицированного метода Эйлера.

$$f(x_i, y_i) = y'(x) = \operatorname{tg} \alpha_i,$$

Так как $f(x_{i+1}, y_{i+1}) = y'(x_{i+1}) = \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$

то модифицированную формулу Эйлера можно представить в виде:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_i + \frac{h}{2} \operatorname{tg} \alpha_{i+1},$$

где $\operatorname{tg} \alpha_i$ - тангенс угла наклона касательной к искомой функции $y(x)$ в начальной точке каждого шага, $\operatorname{tg} \alpha_{i+1}$ - тангенс угла наклона касательной к искомой функции $y(x)$ в конечной точке каждого шага.

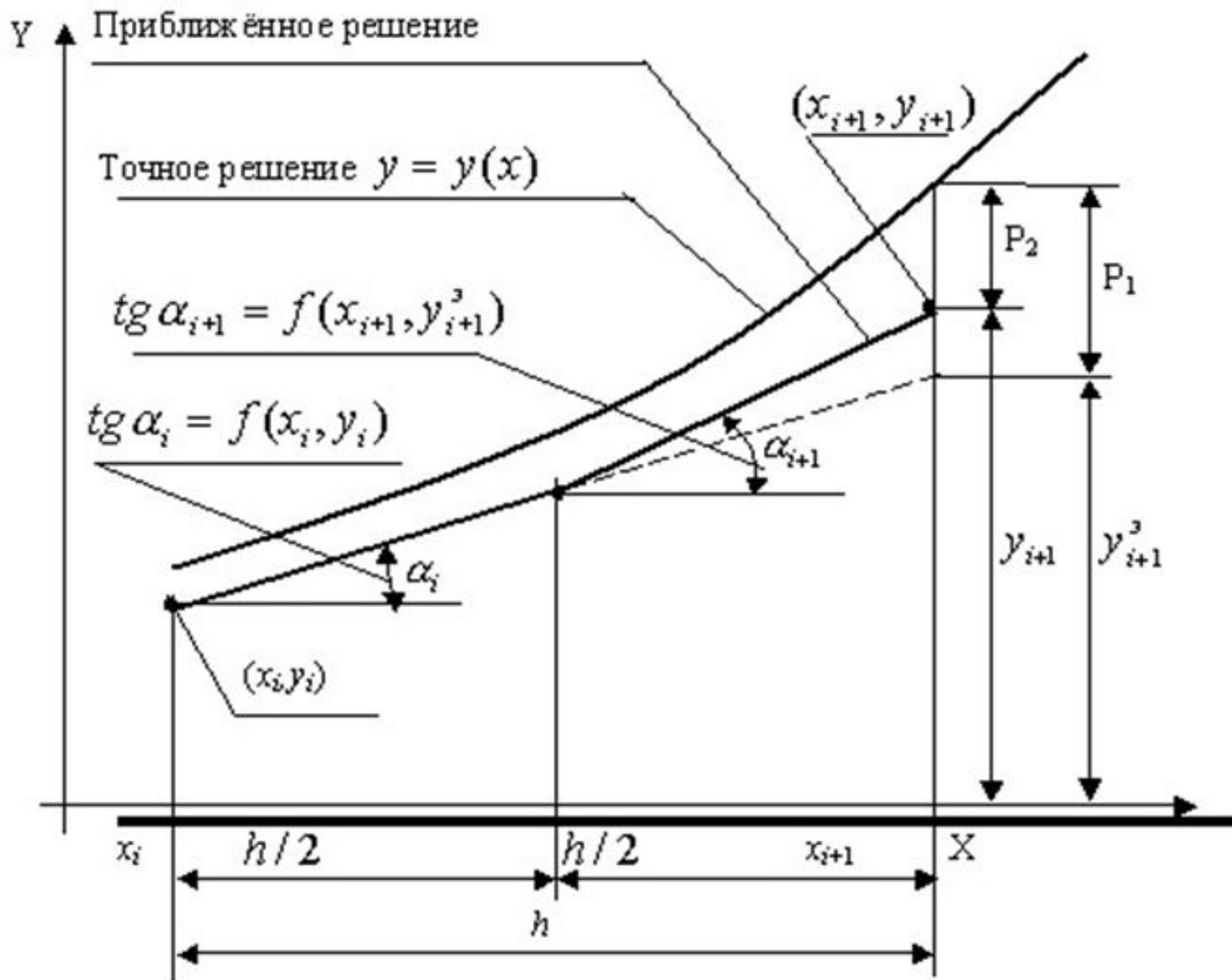


Рис. 5. Геометрический смысл модифицированного метода Эйлера

Здесь P_1 - накопленная ошибка в $(i+1)$ -й точке по методу Эйлера,

P_2 - накопленная ошибка в $(i+1)$ -й точке по модифицированному методу Эйлера.

Как видно из [рис.5](#), в первой половине каждого шага, то есть на участке $[x_i, x_i+h/2]$, искомая функция $y(x)$ аппроксимируется прямой, которая выходит из точки (x_i, y_i) под углом, тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha_i = f(x_i, y_i)$.

Во второй половине этого же шага, т.е. на участке $[x_i + h/2, x_i + h]$, искомая функция $y(x)$ аппроксимируется прямой, которая выходит из точки с координатами

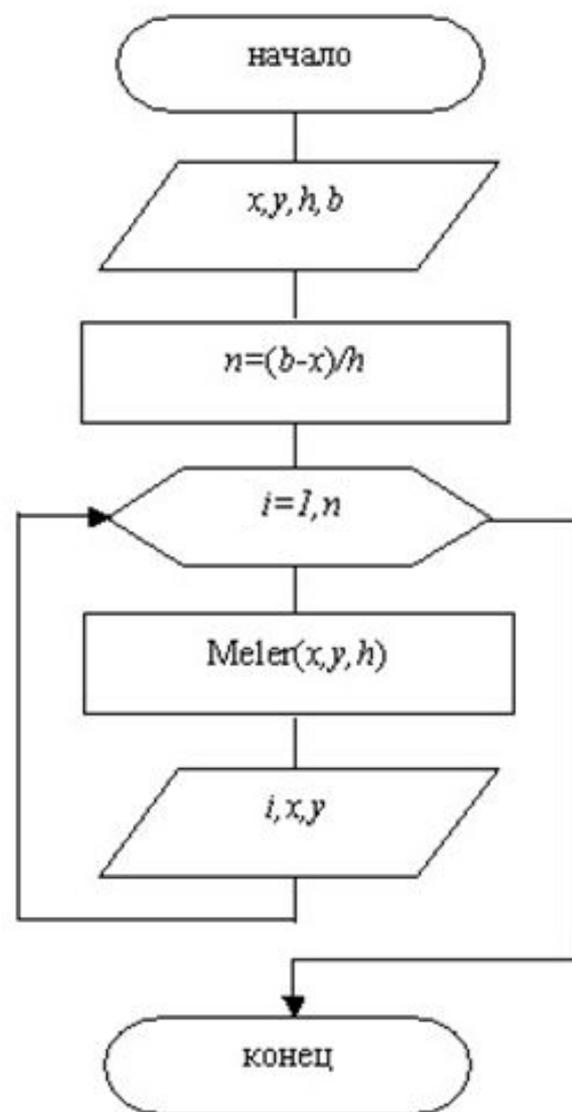
$$\begin{aligned}x &= x_i + h/2, \\y &= y_i = \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\end{aligned}$$

под углом, тангенс которого $\operatorname{tg} \alpha_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1})$.

В результате в модифицированном методе Эйлера функция $y(x)$ на каждом шаге аппроксимируется не одной прямой, а двумя.

Алгоритм модифицированного метода Эйлера можно построить в виде двух программных модулей: основной программы и подпрограммы MELER, реализующей метод ([рис. 6](#)).

Основная программа



Подпрограмма MELER

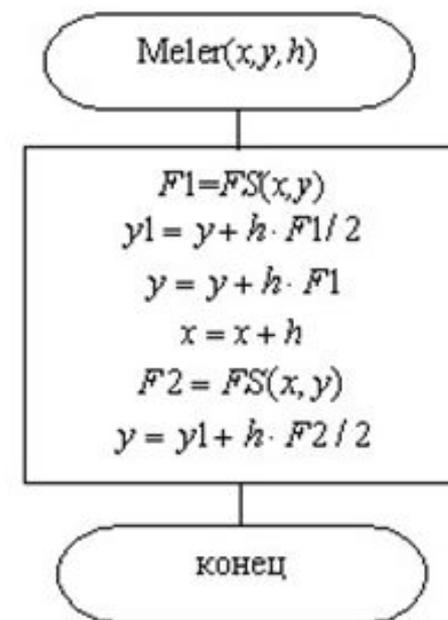


Рис. 6. Схема алгоритма модифицированного метода Эйлера

Здесь (x, y) -при вводе начальная точка, далее текущие значения табличной функции,

h -шаг интегрирования дифференциального уравнения,

b -конец интервала интегрирования.

Усовершенствованный метод Эйлера-Коши с уточнением

Данный метод базируется на предыдущем, однако здесь апостериорная погрешность контролируется на каждом шаге вычисления. Как и в предыдущем случае, рассматриваем задачу Коши на сетке с постоянным шагом h . Грубое значение $y_{k+1}^{\{0\}}$ вычисляется по

формуле Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$$

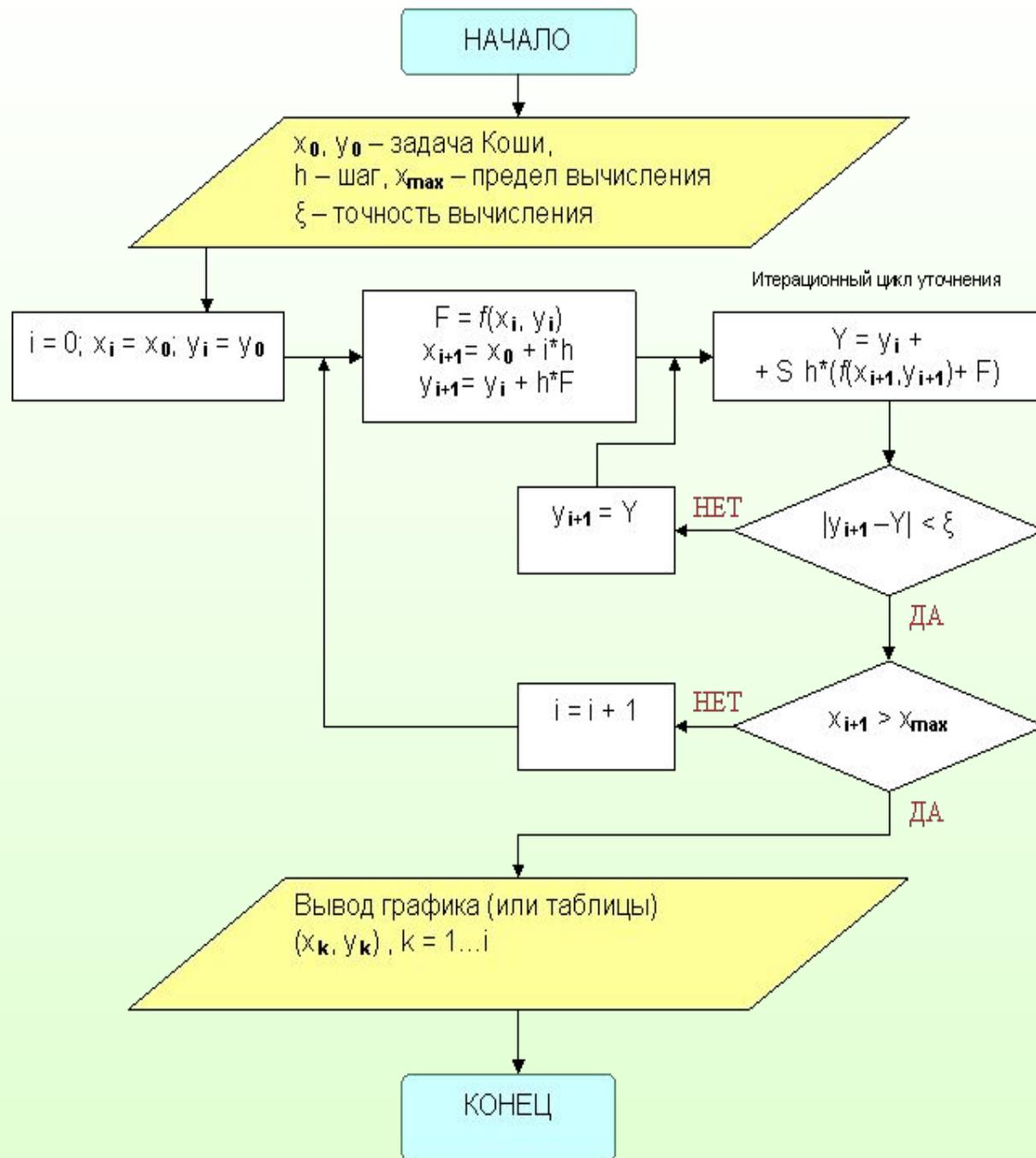
и затем итерационным циклом уточняется по формуле:

$$y_{k+1}^{\{m+1\}} = y_k^{\{m\}} + \frac{1}{2}h \cdot \left(f(x_k, y_k^{\{m\}}) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{\{m\}}) \right), \quad \text{где } m - \text{ номер итерации.}$$

Итерационный цикл повторяется до тех пор, пока $|y_{k+1}^{\{m+1\}} - y_{k+1}^{\{m\}}| < \varepsilon$.

Данная формула также легко обобщается на решение систем ОДУ. Априорная погрешность метода при $m = 1$ на каждом шаге порядка h^3 .

Рис.6'. Блок-схема метода Эйлера-Коши с уточнением



Метод Рунге - Кутта 4-го порядка

Самое большое распространение из всех численных методов решения дифференциальных уравнений получил метод Рунге-Кутта 4-го порядка. В литературе он известен как просто метод Рунге-Кутта.

В этом методе на каждом шаге интегрирования дифференциальных уравнений искомая функция $y(x)$ аппроксимируется рядом Тейлора (9), содержащим члены ряда с h^4 :

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y^{(3)}(x_i) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_i) \dots$$

В результате ошибка на каждом шаге имеет порядок h^5 .

Для сохранения членов ряда, содержащих h^2, h^3, h^4 необходимо определить вторую y'' , третью y''' и четвертую $y^{(4)}$ производные функции $y(x)$. Эти производные аппроксимируем разделенными разностями второго, третьего и четвертого порядков соответственно.

В результате для получения значения функции y_{i+1} по методу Рунге-Кутта выполняется следующая последовательность вычислительных операций:

$$T_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$T_2 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_1/2),$$

$$T_3 = h \cdot f(x_i + h/2, y_i + T_2/2),$$

$$T_4 = h \cdot f(x_i + h, y_i + T_3),$$

$$y_{i+1} = y_i + (T_1 + 2 \cdot T_2 + 2 \cdot T_3 + T_4)/6.$$

Вывод формулы не приведен. Предоставляется возможность вывод формул выполнить самостоятельно.

К достоинствам метода следует отнести высокую точность вычислений. Схемы более высокого порядка точности практически не употребляются в силу своей громоздкости. Также немаловажно, что метод является *явным*, т.е. значение y_{k+1} вычисляется по ранее найденным значениям за известное заранее число действий.

Алгоритм метода Рунге-Кутта (4-го порядка) можно построить в виде двух программных модулей: основной программы и подпрограммы Rk4, реализующей метод [\(рис 7\)](#).

Здесь (x,y)-при вводе начальная точка, далее текущие значения табличной функции,

h-шаг интегрирования дифференциального уравнения,

b-конец интервала интегрирования.

Основная программа

Подпрограмма Rk4

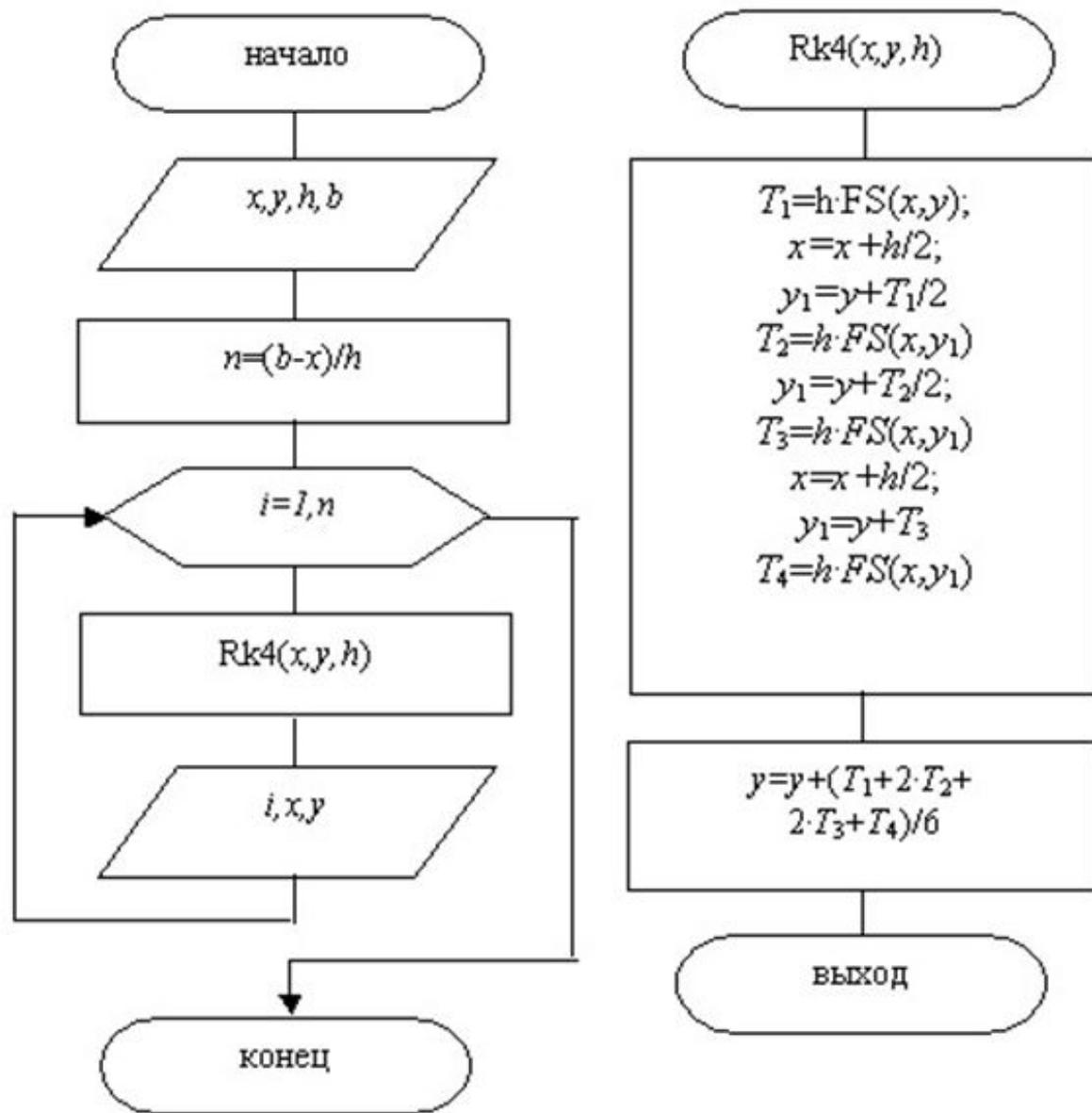


Рис. 7. Схема алгоритма метода Рунге-Кутты 4-го порядка.

Все представленные выше схемы допускают расчет с переменным шагом. Например, шаг можно уменьшить там, где функция быстро изменяется, и увеличить в обратном случае. Так, *метод Рунге-Кутты-Мерсона* позволяет оценивать погрешность на каждом шаге и, в зависимости от полученной оценки принимать решение об изменении шага. Автоматический выбор шага позволяет значительно сократить время вычислений.

Метод Рунге – Кутта - Мерсона

Этот метод отличается от метода Рунге – Кутта четвертого порядка возможностью оценивать погрешность на каждом шаге и в зависимости от этого принимать решение об изменении шага. Один из вариантов формул:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{1}{2}(k_4 + k_5) + o(h^5)$$

$$k_1 = h_3 f(x_n, y_n) \quad ; \quad h_3 = \frac{h}{3}$$

$$k_2 = h_3 f(x_n + h_3, y_n + k_1)$$

$$k_3 = hf \left[x_n + h_3, y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \right]$$

$$k_4 = k_1 + 4h_3 f \left[x_n + \frac{h}{2}, y_n + 0.375(k_1 + k_3) \right]$$

$$k_5 = h_3 f \left[x_0 + h, y_0 + 1.5(k_4 - k_3) \right]$$

$R_{n+1} = 0.2k_4 - 0.3k_3 - 0.1k_5$ - погрешность на каждом шаге.

Пусть задана максимальная погрешность ξ . Если $|R_{n+1}| > \xi$, $h = h/2$, и (n+1) цикл расчета повторяется (с точки x_n, y_n) с новым шагом.

Если же $|R_{n+1}| < \frac{\xi}{32}$, $h = 2h$.

Автоматический выбор шага позволяет значительно сократить время решения ОДУ.

Схема метода РКМ обобщается на системы ОДУ аналогично классической схеме Рунге – Кутты.

Метод Пикара

Данный метод решает задачу Коши. Для простоты записи ограничимся одним дифференциальным уравнением. Алгоритм легко обобщается на случай системы дифференциальных уравнений путём формальной замены $y(x)$ и $f(x)$ на соответствующие векторы. Метод Пикара является приближенным методом, обобщающим метод последовательных приближений.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения 1-го порядка:

$$y' = f(x, y(x)), \quad x_0 \leq x \leq X \quad y(x_0) = y_0 \quad (13)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (13), заменим исходную задачу эквивалентной ей задачей решения интегрального уравнения Вольтерра:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (14)$$

Решая интегральное уравнение (14) методом последовательных приближений, получим итерационный процесс Пикара:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

На каждом этапе итерационного процесса Пикара в (15) интегрирование выполняется либо точно, либо численными методами.

Доказательство сходимости метода Пикара предполагает, что в некоторой ограниченной области $G(x,y)$ правая часть уравнения (13) - $f(x,y)$ непрерывна и удовлетворяет по переменной y условию Липшица. Т.е.

$$|f(x, \xi_1) - f(x, \xi_2)| \leq L|\xi_1 - \xi_2|.$$

Поскольку область $G(x,y)$ ограничена, то выполняются неравенства:

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b.$$

Введём обозначения для погрешности приближенного решения: $z_n(x) = y_0(x) - y(x)$. Вычитая (14) из (15) и, используя условие Липшица,

находим:

$$|z_{n+1}(x)| \leq L \int_{x_0}^x |z_n(t)| dt \quad (16)$$

Решая последовательно рекуррентное соотношение (16), находим:

$$|z_1| \leq bL(x - x_0) \quad |z_2| \leq \frac{1}{2} bL^2 (x - x_0)^2, \dots, \quad |z_n| \leq \frac{1}{n!} bL^n (x - x_0)^n.$$

Из последних неравенств оценка погрешности:

$$|z_n(x)| \leq \frac{1}{n!} b(La)^n \approx \frac{b}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{eLa}{n} \right)^n \quad (17)$$

Из оценки погрешности по ур.(17) следует, что $|z_n(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. приближенное решение равномерно сходится к точному во всей области $G(x,y)$.

Для иллюстрации метода Пикара применим его к решению уравнения вида:

$$y'(x) = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0. \quad (18)$$

Программа Data_sheet2.m рассчитывает последовательные приближённые решения ур.(18) методом Пикара. В результате выводятся 4 последовательных приближённых решения. Видно, что при $|x| \leq 1$ приближения сходятся к истинному решению с высокой точностью.

Метод малого параметра

Метод малого параметра был предложен А. Пуанкаре в 1892 г. Пусть правая часть уравнения (13) зависит от параметра λ , т.е.

$$y' = f(x, y; \lambda) . \quad (19)$$

При этом известно некоторое частное решение $y_0(x)$ при некотором значении параметра $\lambda = \lambda_0$. Решение будем искать в виде ряда

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n y_n(x) \quad (20)$$

Подставим (20) в (19) и проведём разложение в ряд Тейлора по степеням $(\lambda - \lambda_0)$. Объединим слагаемые с сомножителями одной и той же степени по $(\lambda - \lambda_0)$ и приравняем их нулю, тогда:

$$y_0' = f(x, y_0; \lambda_0)$$
$$y_1' = f_y(x, y_0; \lambda_0)y_1 + f_\lambda(x, y_0; \lambda_0), \quad (21)$$

$$y_2' = 2f_{yy}(x, y_0; \lambda_0)y_2 + f_{yy}(x, y_0; \lambda_0)y_1^2 + f_{\lambda y}(x, y_0; \lambda_0)y_1 + f_{\lambda\lambda}(x, y_0; \lambda_0) \text{ и т.д.}$$

Общий член разложения (21) можно представить в виде:

$$y_n' = \alpha_n(x)y_n(x) + \beta_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

т.е. определение коэффициентов разложения (20) сводится к решению линейных уравнений (22).

Рассмотрим пример. Пусть $y' = f(x, y; \lambda) = x^2 + (1 + \lambda)y^2$ и $\lambda_0 = -1$. В листинге Data_sheet3.m приведен код программы, которая аналитически решает уравнения (21) для нашего примера. Итог работы программы – аналитические выражения для приближений $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ соответственно.

Метод прогноза-коррекции Адамса

Метод основан на аппроксимации интерполяционными полиномами правых частей ОДУ.

Пусть с помощью любого из методов, рассмотренных выше, вычислено решение заданного дифференциального уравнения в точках x_1, x_2, x_3 (а в точке x_0 решение и так известно – поставлена задача Коши). Полученные значения функции обозначим как y_0, y_1, y_2, y_3 , а значения правой части дифференциального уравнения как f_0, f_1, f_2, f_3 , где $f_k = f(x_k, y_k)$. Начиная с четвертой точки, на каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения вычисления осуществляются по схеме

$$P(EC)^{m}E$$

где P – прогноз решения; E – вычисление $f(x, y)$; C – коррекция решения; m – количество итераций коррекции. Схемы такого типа называют «прогноз-коррекция»: это подразумевает сначала приблизительное вычисление решение по формуле низкого порядка, а затем уточнение с учетом полученной информации о поведении интегральной кривой.

Иногда в методе Адамса используется схема $PEC E$ на каждом шаге процесса интегрирования, т.е. осуществляется только одна коррекция. Формулы метода также легко переносятся на решение систем ОДУ первого порядка.

Пример 1. Различные формы записи дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2y\frac{dy}{dx} - y^2(e^{2x} - 1) = 0$$

$$xdy + (y - \cos x)dx = 0$$

$$y' + 2y = e^x$$

Те же уравнения, записанные в нормальной форме.

$$\frac{dy}{dx} = y(1 \pm e^x) \quad \text{или} \quad y' = y(1 \pm e^x)$$

$$y' = \frac{1}{x}(\cos x - y)$$

$$y' = e^x - 2y$$

Пример 2. Проверка правильности решения дифференциального уравнения первого порядка.

$$y(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Покажем, что $y(x) = \frac{\sin x}{x}$ есть решение уравнения $x dy + (y - \cos x) dx = 0$.

Для этого вычислим dy и подставим его в уравнение:

$$dy = \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx,$$

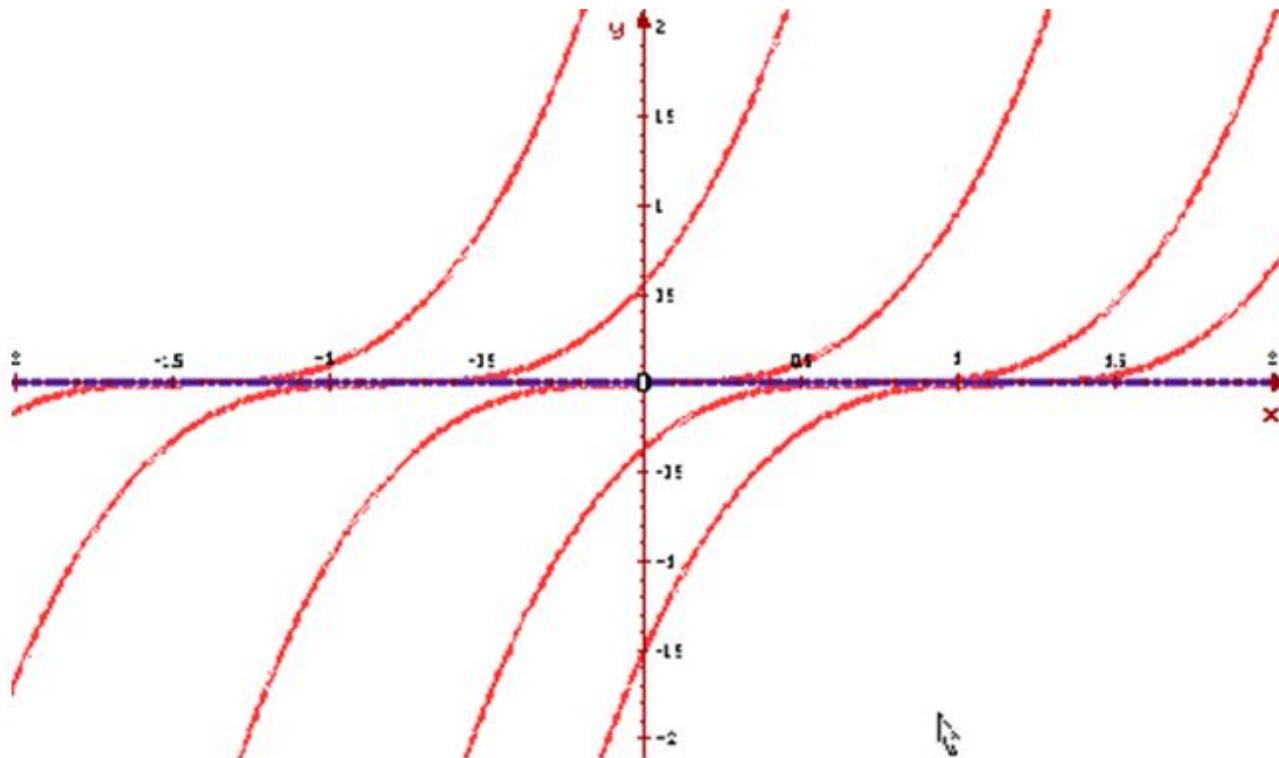
$$\begin{aligned} x dy + (y - \cos x) dx &= x \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right) dx + \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) dx = \\ &= \cos x dx - \frac{\sin x}{x} dx + \frac{\sin x}{x} dx - \cos x dx \equiv 0 \end{aligned}$$

Пример 3. Пример нарушения единственности решения задачи Коши

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3\sqrt[3]{y^2}$$

Его правая часть непрерывна всюду, а частная производная правой части при $y=0$ не существует. На рисунке видно, что через каждую точку с координатами $x = C$, $y = 0$ проходит два решения: $y=0$ и $y = (x - C)^3$.



Пример 4. Решение задачи методом Эйлера.

Применяя метод Эйлера, найти решение задачи Коши:
$$\begin{cases} y' = y - t \\ y(0) = 1.5 \end{cases}$$
 в трех

последовательных точках $t_1 = 0.2$, $t_2 = 0.4$, $t_3 = 0.6$. Найти точное решение задачи и найти величину абсолютной погрешности в указанных точках.

Возьмем шаг $h = 0.2$. Используя расчетную формулу Эйлера, найдем приближенное решение задачи Коши:

$$y_1 = y_0 + 0.2(y_0 - t_0) = 1.5 + 0.2 \cdot 1.5 = 1.8$$

$$y_2 = y_1 + 0.2(y_1 - t_1) = 1.8 + 0.2 \cdot (1.8 - 0.2) = 2.12$$

$$y_3 = y_2 + 0.2(y_2 - t_2) = 2.12 + 0.2 \cdot (2.12 - 0.4) = 2.464$$

Таким образом, получили численное решение задачи Коши с шагом h :

t_i	0	0.2	0.4	0.6
y_i	1.5	1.8	2.12	2.464

В этой задаче легко находится точное решение, например, методом вариации постоянной:

$y(t) = 0.5e^t + t + 1$. Вычислим значения точного решения в указанных точках.

t_i	0	0.2	0.4	0.6
$y(t_i)$	1.5	1.811	2.146	2.511

Абсолютную погрешность вычислим так: $r_i = |y(t_i) - y_i|$. Тогда $r_1 = 0.011$, $r_2 = 0.026$, $r_3 = 0.047$. Таким образом, максимальная величина погрешности равна $R \approx 0.05$.

Решение дифференциальных уравнений в MATLAB

Для решения дифференциальных уравнений и систем в MATLAB предусмотрены следующие функции **ode45(f, interval, X0 [, options])**, **ode23(f, interval, X0 [, options])**, **ode113(f, interval, X0 [, options])**, **ode15s(f, interval, X0 [, options])**, **ode23s(f, interval, X0 [, options])**, **ode23t (f, interval, X0 [,options])** и **ode23tb(f, interval, X0 [, options])**.

Входными параметрами этих функций являются:

f - вектор-функция для вычисления правой части уравнения системы уравнений;

interval - массив из двух чисел, определяющий интервал интегрирования дифференциального уравнения или системы;

X0 - вектор начальных условий системы дифференциальных уравнений;

options - параметры управления ходом решения

Все функции возвращают:

массив T - координаты узлов сетки, в которых ищется решение;

матрицу X , i -й столбец которой является значением вектор-функции решения в узле T_i .

В функции **ode45** реализован метод Рунге-Кутта 4-5 порядка точности, в функции **ode23** также реализован метод Рунге-Кутта, но 2-3 порядка, а функция **ode113** реализует метод Адамса.

Для решения жёстких систем предназначены функция **ode15s**, в которой реализован метод Гира, и функция **ode23s**, реализующая метод Розенброка. Для получения более точного решения жёсткой системы лучше использовать функцию **ode15s**.

Для решения системы с небольшим числом жёсткости можно использовать функцию **ode23t**, а для грубой оценки подобных систем служит функция **ode23tb**.

Символьное решение обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка осуществляет функция **dsolve**

```
r = dsolve('eq1,eq2,...', 'cond1,cond2,...','v')
```

В листинге `Data_sheet1.m` приведен код программы, иллюстрирующей использование функции **dsolve** в MATLAB, которая даёт точное решение обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка.

MATLAB решил все семь дифференциальных уравнений, при этом последнее уравнение он не смог разрешить относительно зависимой переменной y , о чём и доложил.

%примеры аналитического решения обыкновенных
Data_sheet1.m

%дифференциальных уравнений с помощью функции

%MATLAB - dsolve

%пример №1 ($u'=au$)

expl1=dsolve('Du=a*u','x')

%пример №2 ($u'=u^2$)

expl2=dsolve('Du=u^2','x')

%пример №3 ($u''-g=0$)

expl3=dsolve('D2u-g=0','x')

%пример №4 ($u''+q^2u=0$)

expl4=dsolve('D2u+q^2*u=0','x')

%пример №5 ($u''-(3/4)x^{-2}u=0$)

expl5=dsolve('D2u-(3/4)*x^(-2)*u=0','x')

%пример №6 ($u'=f(x)$)

expl6=dsolve('Du=f(x)','x')

%пример №7 ($u'=(u-x)/(u+x)$)

expl7=dsolve('Du=(u-x)/(u+x)','x')

Пример:

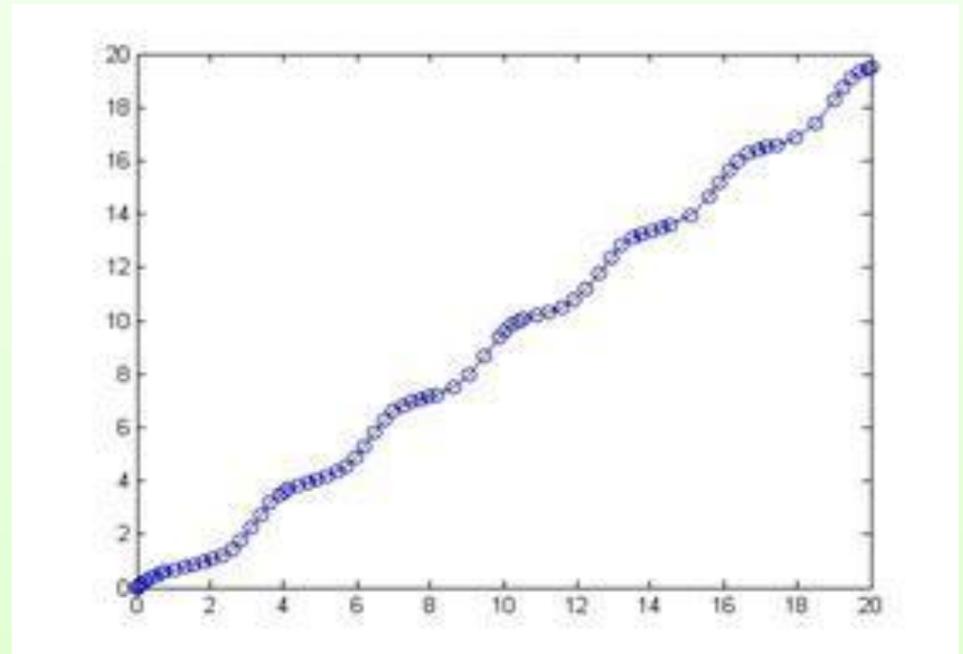
В М-файле с именем pr7.m пишем:

```
function f=pr7(x,y)
f=cos(x+y)+(3/2)*(x-y);
end
```

Потом в командном окне вызываем функцию ode113:

```
ode113(@pr7,[0 20],0) %Метод Адамса: @pr7 – ссылка на М-
функцию, [0 20]- интервалы интегрирования,0 - условие:  $y(0)=0$ 
```

Результатом будет график:



Пример:

Необходимо реализовать метод Рунге-Кутты 4 порядка и решить задачу Коши для предложенной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dx}y_1 = y_2$$

$$\frac{d}{dx}y_2 = \left(\frac{y_1}{x} - y_2\right)\frac{1}{x} - y_1$$

$$y_1(0) = 0.1$$

$$y_2(0) = 0.5$$

В М-файле с именем pr8.m пишем:

```
function dy=pr8(x,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=((y(1)/x)-y(2))*(1/x)-y(1);
end
```

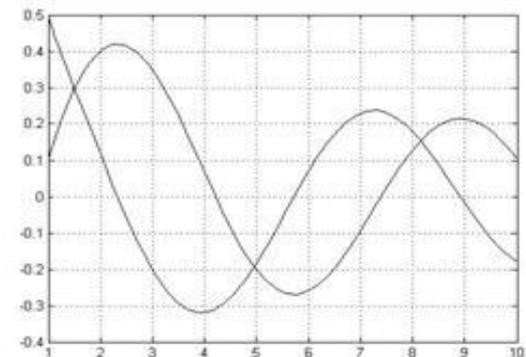
Потом в командном окне вызываем фун

```
[x,y]=ode45(@pr8,[1 10], [0.1 0.5]);
```

```
plot(x,y,'-k')
```

```
grid;
```

Результатом будет график:



Пример.

```
% Решить задачу Коши методом Эйлера и оценить погрешность.  
    % Введём функцию  
    f = inline('y-t');  
% Начальные условия  
    y0 = 1.5;  
% Точное решение  
    ye = dsolve('Dy=y-t','y(0)=1.5');  
% Приближённое решение по методу Эйлера, t=0..1  
    n = 100;  
    h = 1 / n;  
    y = [];  
    t0 = 0;  
    for i=1:n  
        y(end+1) = y0;  
        y0 = y0 + h * f(t0, y0);  
        t0 = t0 + h;  
    end  
% Найдём погрешность решения  
    t = linspace(0, 1, n);  
    dy = max(abs(y - subs(ye, t)))  
  
>>  
    dy = 0.0301
```

Задания

Задача 1. Проверить, являются ли данные функции решениями указанных дифференциальных уравнений:

$$y(x) = e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x, \quad y' + 2y = e^x$$

$$y(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}, \quad (1-x^2)y' + xy = 2x$$

Задача 2.

А) Найти методом Эйлера на отрезке $[0, 1]$ с шагом $h=0.2$ и с шагом 0.05 приближенное решение задачи Коши

$$y' = \sin(x) - \cos(y), \quad y(0) = 1.$$

Б) Найти решение этой же задачи методом Рунге-Кутты 4 порядка с шагом $h=0.2$ и с шагом 0.05 .

Изобразить все приближенные решения на одном графике.

Оценить погрешность в каждом случае по Рунге.