12.11.20.

Тема:
Логарифмическая функция.
Свойства, график.
Решение примеров.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:
https://infourok.ru/videouroki/1225
https://infourok.ru/videouroki/1229

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

В математике и её приложениях часто встречается *логарифмическая функция*

$$y = \log_a x,$$

где a — заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Логарифмическая функция обладает свойствами:

1) Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел.

Это следует из определения логарифма, так как выражение $\log_a x$ имеет смысл только при $x > 0$.

2) Множество значений логарифмической функции — множество R всех действительных чисел.

Это следует из того, что для любого действительного числа b есть такое положительное число x, что $\log_a x = b$, т. е. уравнение $\log_a x = b$ имеет корень. Такой корень существует и равен $x = a^b$, так как $\log_a a^b = b$.

3) Логарифмическая функция не является ограниченной.

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей на промежутке $(0; +\infty)$, если $a > 1$, и убывающей, если $0 < a < 1$.

5) Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $x > 1$, отрицательные при $0 < x < 1$. Если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ принимает положительные значения при $0 < x < 1$, отрицательные при $x > 1$.

График логарифмической функции с основанием > 1

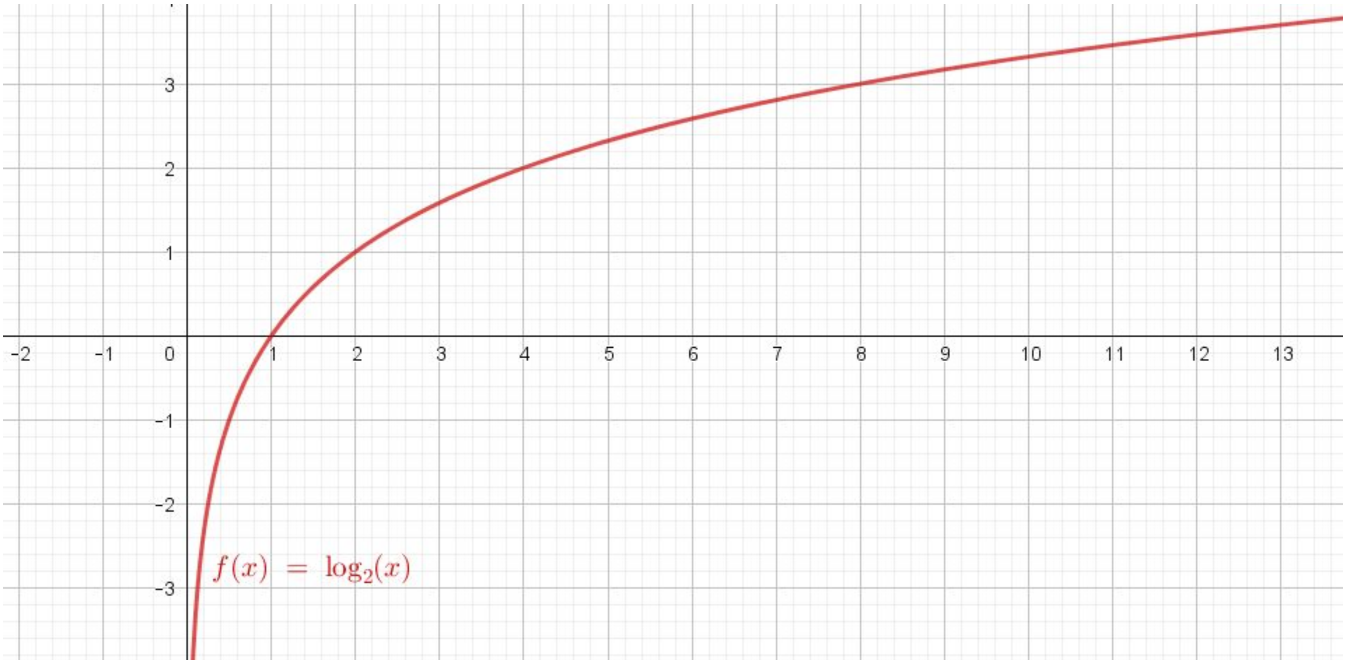

График логарифмической функции с основанием < 1

Отметим, что график любой логарифмической функции $y = \log_a x$ проходит через точку (1; 0). При решении уравнений часто используется следующая теорема:

Теорема. Если $\log_a x_1 = \log_a x_2$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, то $x_1 = x_2$.

Задача 1 Решить уравнение $\log_5(3x-2)=\log_5 7$.

▶ Используя доказанную теорему, получаем $3x-2=7$, откуда $3x=9$, $x=3$. ◁

Десятичный и натуральный логарифм.

Для логарифмов чисел составлены специальные таблицы (таблицы логарифмов). Логарифмы вычисляют также с помощью микрокалькулятора. И в том и в другом случае находятся только десятичные или натуральные логарифмы.

Десятичным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию 10 и пишут $\lg b$ вместо $\log_{10} b$.

Натуральным логарифмом числа называют логарифм этого числа по основанию e, где e — иррациональное число, приближённо равное 2,7. При этом пишут $\ln b$ вместо $\log_e b$.

Вычисления $\lg b$ и $\ln b$ проводятся на микрокалькуляторе с помощью клавиш $\boxed{\lg}$ и $\boxed{\ln}$.

Например, вычисляя $\lg 13$, получаем

$$\lg 13 \approx \underline{1{,}1139433};$$

вычисляя $\ln 13$, получаем

$$\ln 13 \approx \underline{2{,}5649493}.$$

Оказывается, что достаточно знать значения только десятичных или только натуральных логарифмов чисел, чтобы находить логарифмы чисел по любому основанию. Для этого используется *формула перехода от логарифма по одному основанию к логарифму по другому основанию.*

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \qquad (1)$$

где $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Задача С помощью микрокалькулятора вычислить $\log_3 80$ с точностью до 0,01.

▶ 1) С помощью десятичных логарифмов по формуле (2) находим: $\log_3 80 = \frac{\lg 80}{\lg 3} \approx \underline{3{,}9886927}$.

2) С помощью натуральных логарифмов:

$$\log_3 80 = \frac{\ln 80}{\ln 3} \approx \underline{3{,}9886928}.$$

Ответ $\log_3 80 \approx 3{,}99$. ◁

Формула перехода от одного основания логарифма к другому иногда используется при решении уравнений.

Задача Решить уравнение $\log_2 x + \log_4 x = \frac{3}{2}$.

▶ По формуле перехода $\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$.

Поэтому уравнение принимает вид $\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = \frac{3}{2}$, откуда $\log_2 x = 1$, $x = 2$. ◁

Практическая часть.

303 Выразить данный логарифм через десятичный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 25$; 2) $\log_5 8$; 3) $\log_9 0{,}75$; 4) $\log_{0,75} 1{,}13$.

304 Выразить данный логарифм через натуральный и вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\log_7 5$; 2) $\log_8 15$; 3) $\log_{0,7} 9$; 4) $\log_{1,1} 0{,}23$.

307 Решить уравнение:

1) $\log_5 x = 2\log_5 3 + 4\log_{25} 2$; 2) $\log_2 x - 2\log_{\frac{1}{2}} x = 9$;

3) $\log_3 x = 9\log_{27} 8 - 3\log_3 4$; 4) $\log_9 x^2 + \log_{\sqrt{3}} x = 3$;

327 Решить уравнение:

1) $\log_3 (5x - 1) = 2$; 2) $\log_5 (3x + 1) = 2$;

3) $\log_4 (2x - 3) = 1$; 4) $\log_7 (x + 3) = 2$;

5) $\lg (3x - 1) = 0$; 6) $\lg (2 - 5x) = 1$.