Тригонометрические уравнения

$\boldsymbol{cos\,x = a}$

если $|a| \geq 1$, то решений нет

если $|a| \leq 1$, то $x = \pm\, arccos\, a + 2\pi k, k \in Z$

$cos\,x = 0 \Rightarrow x$

$cos\,x = 1 \Rightarrow x = 2\pi$

$cos\,x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in Z$

$\boldsymbol{sin\,x = a}$

если $|a| \geq 1$, то решений нет

если $|a| \leq 1$, то $x = (-1)^k arcsin\, a + \pi k, k \in Z$

$x = arcsin\, a + 2\pi k, k \in Z$

$x = \pi - arcsin\, a + 2\pi k, k \in Z$

$sin\,x = 0 \Rightarrow$

$sin\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$sin\,x = -1 \Rightarrow$

$\boldsymbol{tg\,x = a}$

$x = arctg\, a + \pi k, k \in Z$

$T(kx + m) = a$

$T = \{ cos$ tg

$\boldsymbol{ctg\,x = a}$

$x = arcctg\, a + \pi k, k \in Z$

Пример:

$tg\ x = a \Rightarrow x = arctg\ a + \pi k, k \in Z$

- Решить уравнения: а) $sin\,2x = \frac{1}{2}$, б) $tg\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение:

а) $t = 2x$

$$sin\,t = \frac{1}{2}$$

$$t = (-1)^k\,arcsin\frac{1}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$t = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$2x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

б) $4x - \frac{\pi}{6} = arctg\ \frac{\sqrt{3}}{3} + \pi k, k \in Z$

$$arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$4x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$4x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

Ответ: а) $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$; б) $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$

Пример:

- Найти корни уравнения $sin\,2x = \frac{1}{2}$, которые принадлежат отрезку $[0, \pi]$.

Решение:

$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$

$k = 0; 1; -1; 2; -2 \dots$

$k = 0 \Rightarrow x = (-1)^0 \frac{\pi}{12} + 0 = \frac{\pi}{12} \in [0, \pi]$

$k = 1 \Rightarrow x = (-1)^1 \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{12} \in [0, \pi]$

$k = -1 \Rightarrow x = (-1)^{-1} \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12} \notin [0, \pi]$

$k = 2 \Rightarrow x = (-1)^2 \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{2} = \frac{13\pi}{12} \notin [0, \pi]$

Ответ: $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

$T(kx + m) = a$

$T = \begin{cases} cos \\ tg \end{cases}$

Пример:

- Решить уравнение: $2\,cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{3}\,cos\frac{x}{2}=0.$

Решение:

$$\begin{cases} cos\frac{x}{2}=0 \\ cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$cos\frac{x}{2}=b\quad 2b^2+\sqrt{3}b=0\; b_1=0,\quad b_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$cos\frac{x}{2}=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\Leftrightarrow x=\pi+2\pi k, k\in Z$$

$$cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\pm arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\pi k, k\in Z$$

$$arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-arccos\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z\Rightarrow x=\pm\frac{10\pi}{6}+4\pi k, k\in Z$$

Ответ: $x=\pi+2\pi k, k\in Z;\ x=\pm\frac{10\pi}{6}+4\pi k, k\in Z$

Пример:

- Решить уравнение: $cos^2x - sin^2x - cos\,x = 0.$

Решение:

$sin^2x = 1 - cos^2x$

$2cos^2x - cos\,x - 1 = 0$

$cos\,x = b$

$2b^2 - b - 1 = 0$

$b_1 = 1,\ b_2 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} cos\,x = 1 \\ cos\,x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

Ответ: $x = 2\pi k, k \in \mathrm{Z},\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

Пример:

- Решить уравнение: $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0.$

Решение:

$\sin x - \frac{1}{3} = 0$ $\qquad$ $\cos x + \frac{2}{5} = 0$

$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$, $x = \pm \arccos\left(-\frac{2}{5}\right) + \pi k, k \in Z.$

Пример:

- Решить уравнение: $cos\,x \cdot sin\,x + \frac{\sqrt{2}}{2} cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2} sin\,x - \frac{1}{2} = 0.$

Решение:

$$\left(cos\,x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(sin\,x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$cos\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $sin\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z; x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Замечание!

- $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

$tg\, x \cdot \ (sin\, x - 1) = 0$

$x = \pi k, k \in Z \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\frac{\pi}{2} + \pi k \notin D(tg\, x)$

Ответ: $x = \pi k, k \in Z$