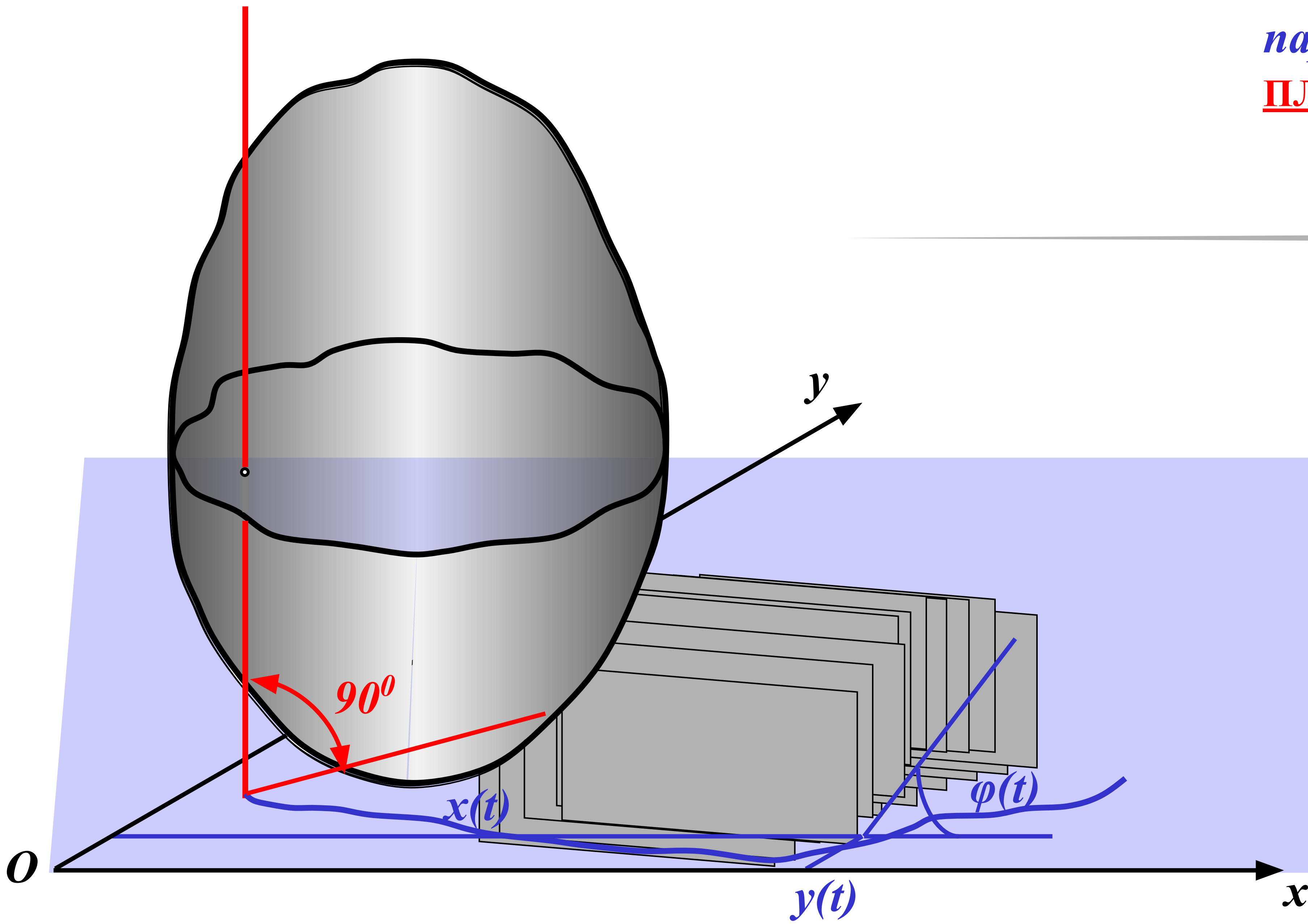
Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.1. Общие положения

Движение, когда каждая точка тела движется все время в одной и той же плоскости и плоскости движения точек параллельны друг другу называется **ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ.**



УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ:

ТРИ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

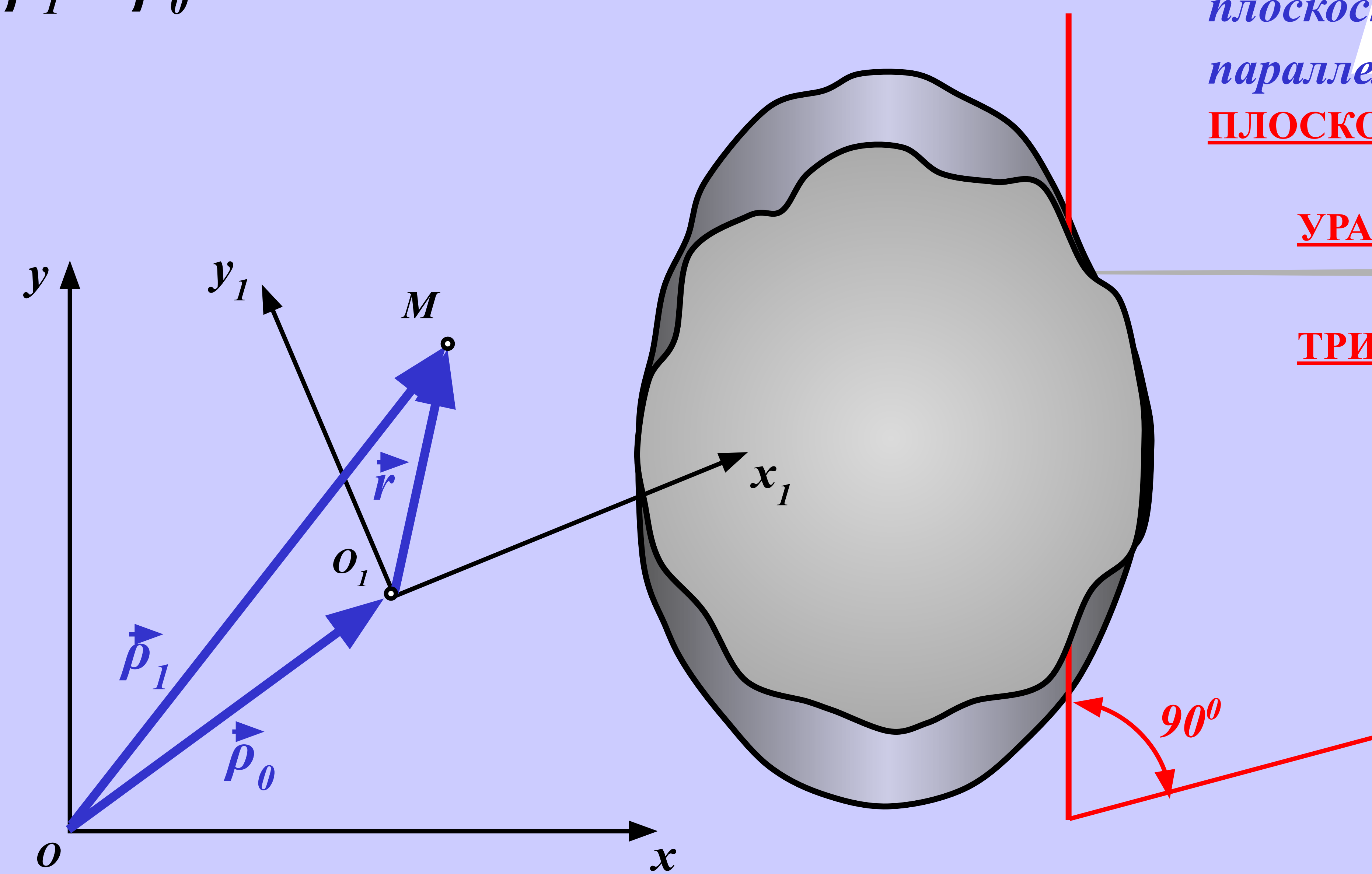
Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.1. Общие положения

Движение, когда каждая точка тела движется все время в одной и той же плоскости и плоскости движения точек параллельны друг другу называется **ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ДВИЖЕНИЕМ.**

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_0 + \vec{r}$$



УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

ТРИ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

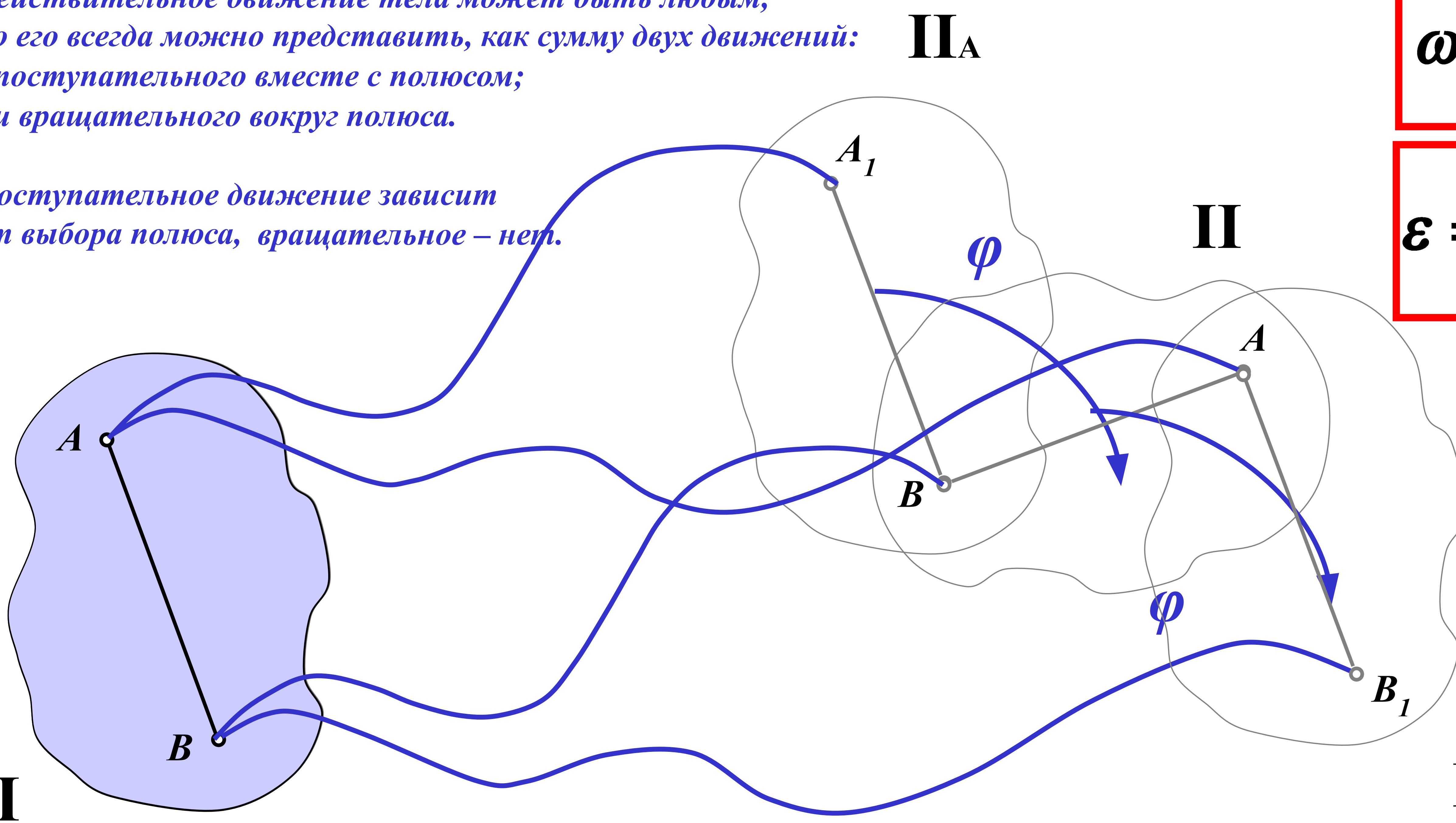
4.2. Разложение плоскопараллельного движения на поступательное и вращательное

Действительное движение тела может быть любым,
но его всегда можно представить, как сумму двух движений:
- поступательного вместе с полюсом;
- и вращательного вокруг полюса.

Поступательное движение зависит
от выбора полюса, вращательное – нет.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

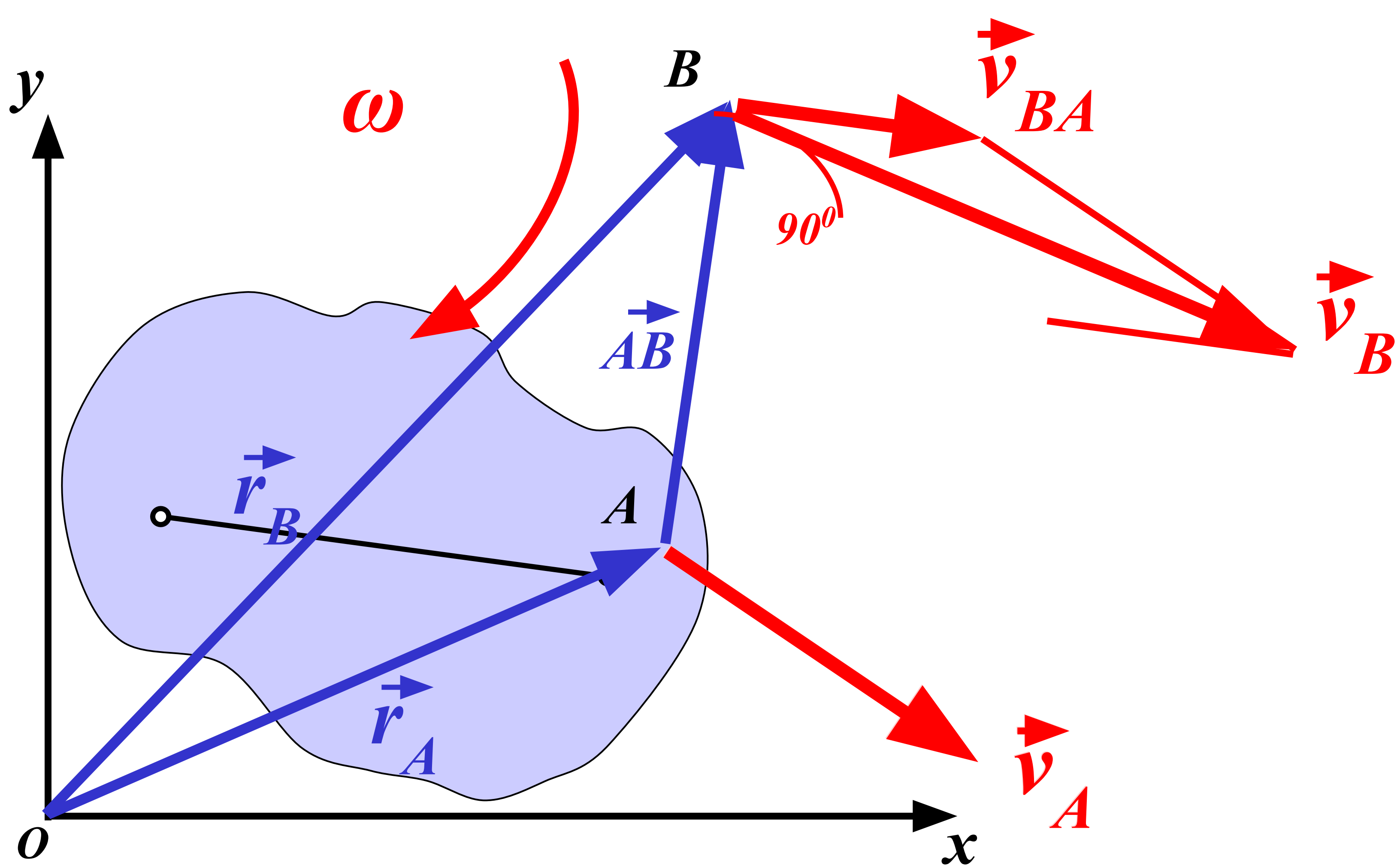
$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$



Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.3. Теорема о сложении скоростей при плоскопараллельном движении



$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \overrightarrow{AB};$$

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt};$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB};$$

$$\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB};$$

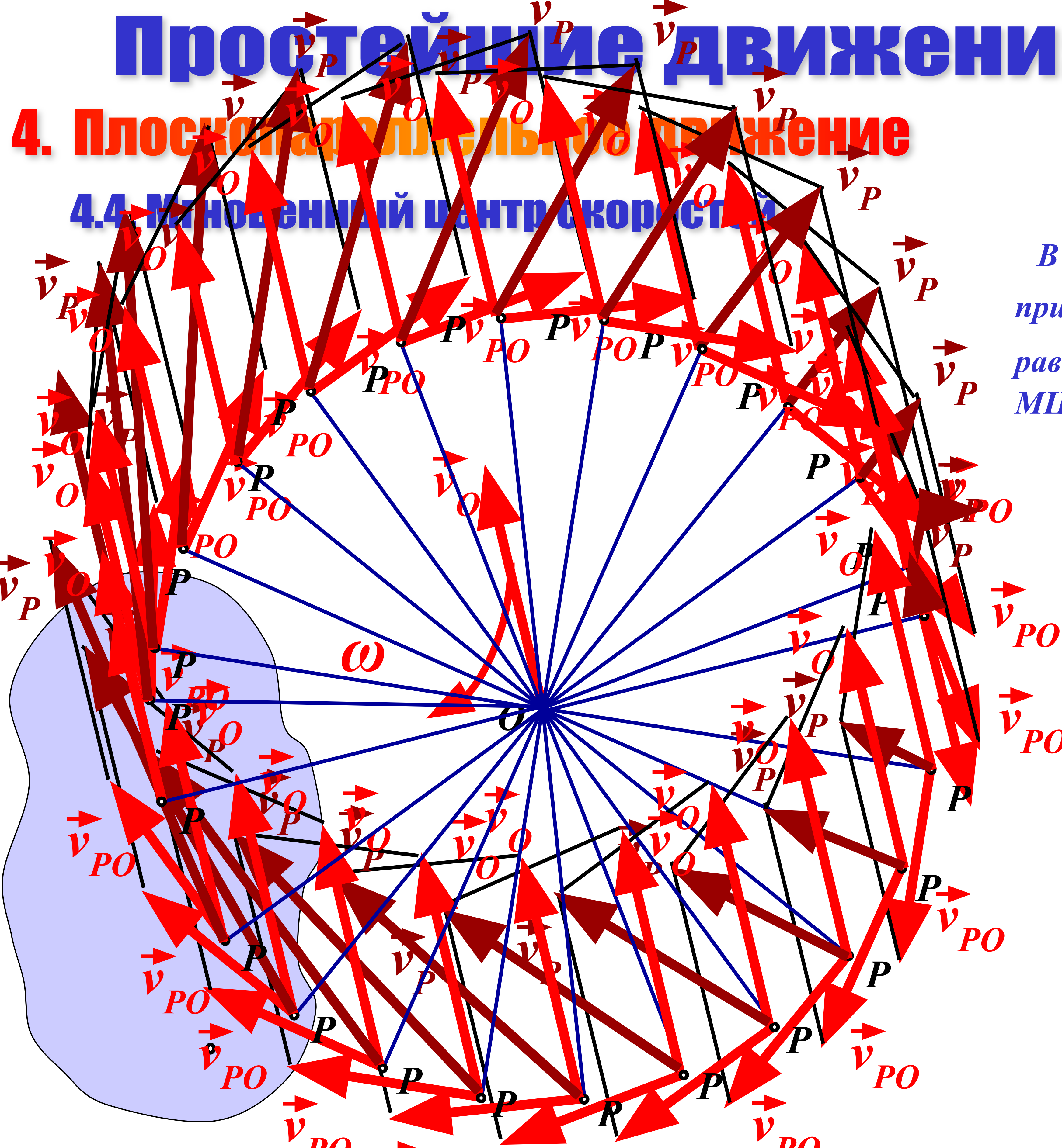
$$\vec{v}_{BA} \perp \overrightarrow{AB};$$

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}}$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.4. Мгновенный центр скоростей



В каждый момент времени при плоском движении при $\omega \neq 0$ существует точка, скорость которой равна 0 - мгновенный центр скоростей (МЦС). МЦС – единственный в данный момент времени.

$$\vec v_P = \vec v_{PO} + \vec v_O,$$

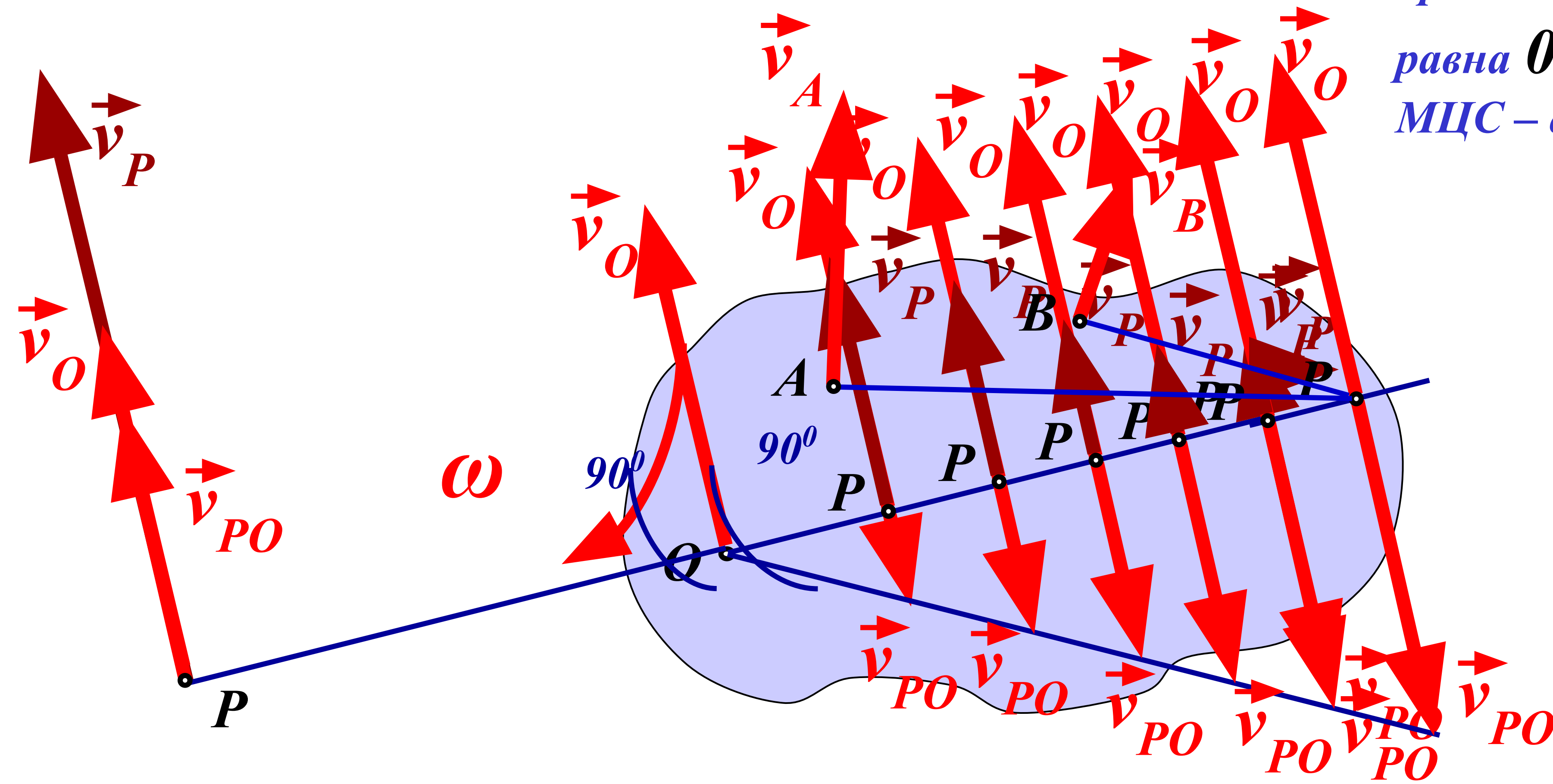
если $\vec v_P = 0$, *то* $\vec v_O = -\vec v_{PO}$

$$\vec v_{PO} \perp OP$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.4. Мгновенный центр скоростей



В каждый момент времени при плоском движении при $\omega \neq 0$ существует точка, скорость которой равна 0 - мгновенный центр скоростей (МЦС). МЦС – единственный в данный момент времени.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{PO} + \vec{v}_O,$$

$$\text{если } \vec{v}_P = 0, \text{ то } \vec{v}_O = -\vec{v}_{PO}$$

$$\vec{v}_{PO} \perp OP$$

$$v_{PO} = \omega \cdot OP, \quad OP = \frac{v_{PO}}{\omega} = \frac{v_O}{\omega}.$$

Приняв МЦС за полюс получим:

$$v_A = v_{PA} \rightarrow v_A = \omega \cdot AP,$$

$$v_B = \omega \cdot BP,$$

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}, \quad \omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_{BA}}{AB}.$$

Мгновенный центр скоростей (МЦС) находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек к их скоростям.

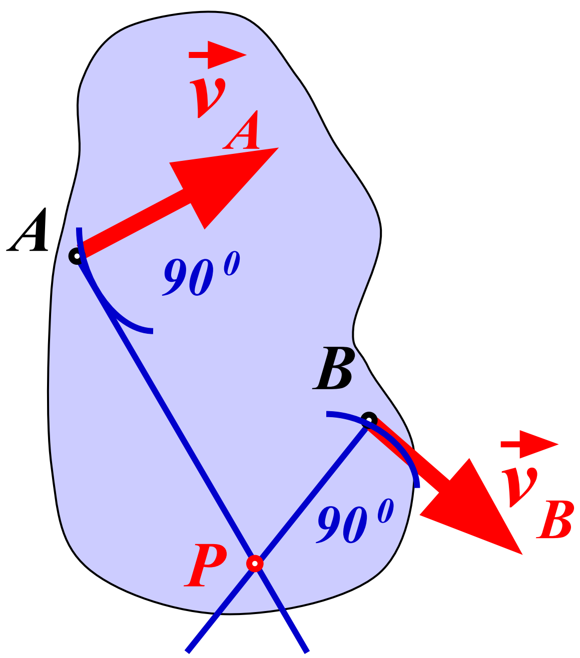
Расстояния от точек до мгновенного центра скоростей прямо пропорционально отношению скоростей этих точек.

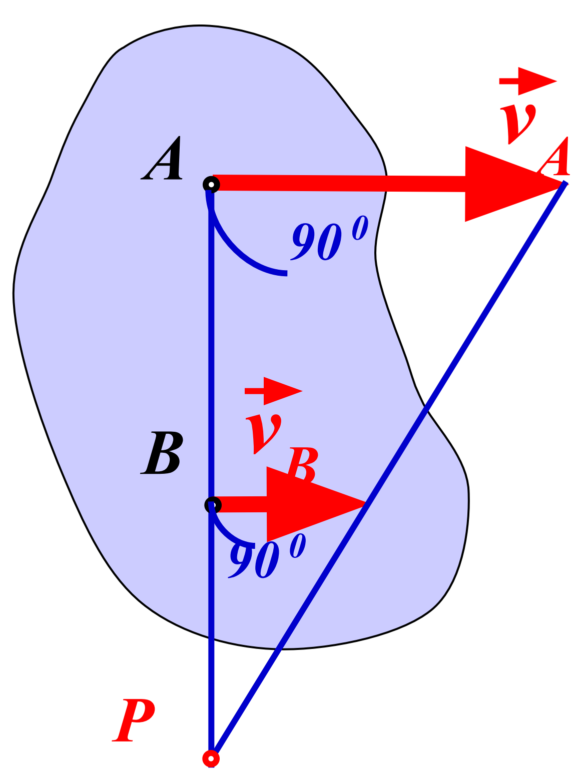
Простейшие движения твердого тела

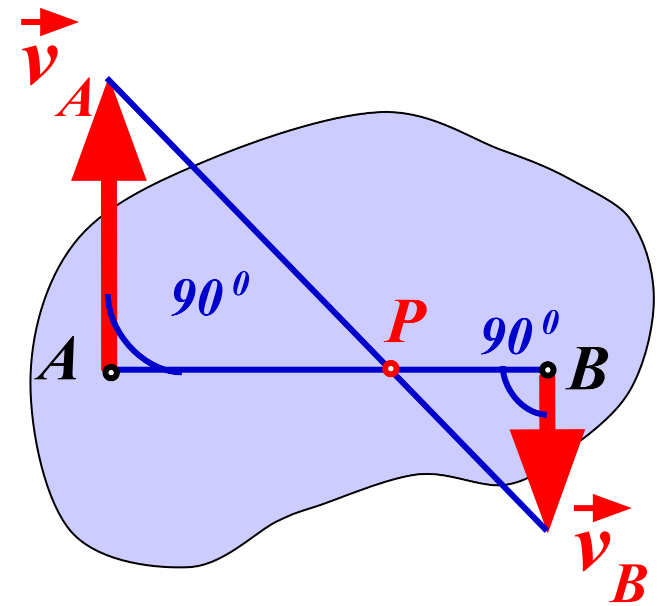
4. Плоскопараллельное движение

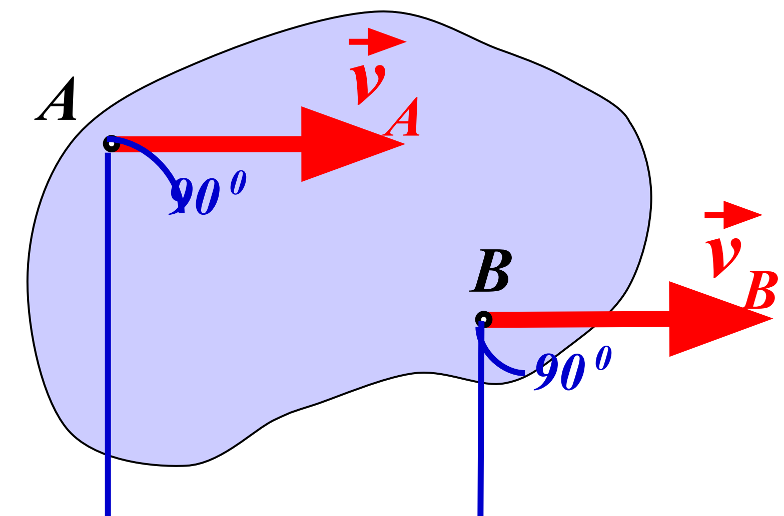
4.4. Мгновенный центр скоростей

4.4.1. Примеры определения мгновенного центра скоростей

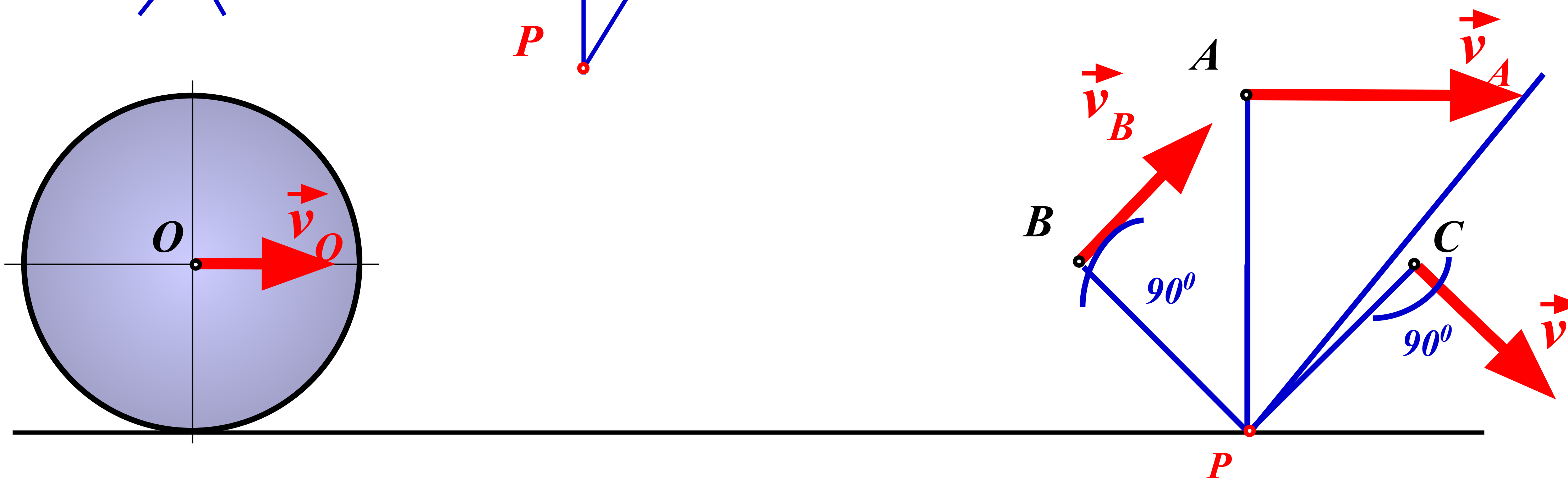








Мгновенно-поступательное движение: $AP = BP = \infty$,
$\vec{v}_A = \vec{v}_B$,
$\omega = 0$.



Простейшие движения твердого тела

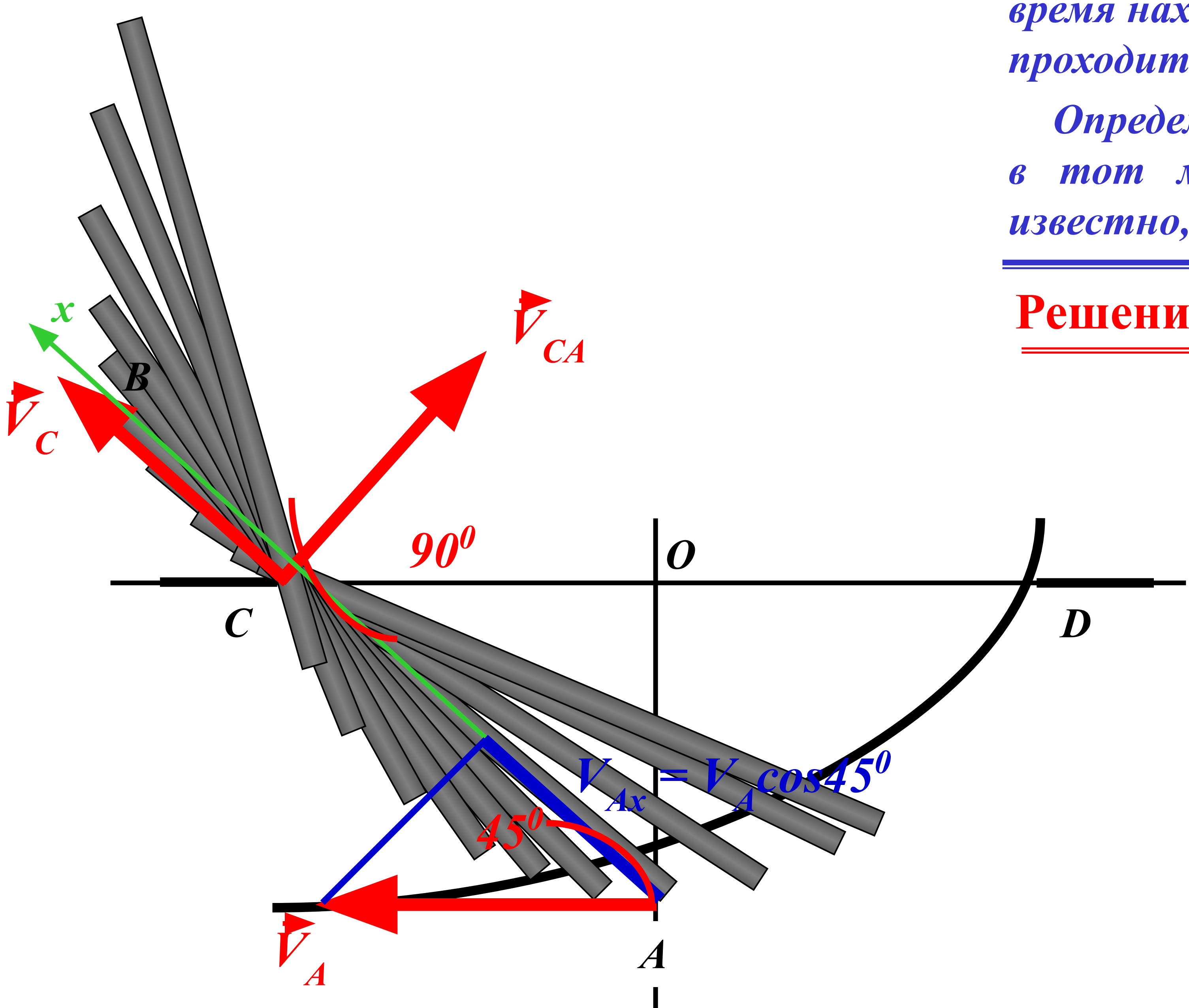
4. Плоскопараллельное движение

4.5. Примеры решения задач

4.5.1. Пример 1

Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD.

Определить скорость V_C точки прямой, совпадающей с точкой C, в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD, если известно, что скорость точки A в этот момент равна 4 м/с.



Решение:

1-й способ:

Применение теоремы о сложении скоростей

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA}; \quad \vec{V}_{CA} \perp AC;$$

$$np_x(\vec{V}_C) = np_x(\vec{V}_A) + np_x(\vec{V}_{CA});$$

$$V_C = V_A \cos 45^0 + 0;$$

$$V_C = V_A \cos 45^0 = 4 \cdot 0.707 = 2.83\ м/с.$$

Ответ: $V_C = 2.83\ м/с$

Простейшие движения твердого тела

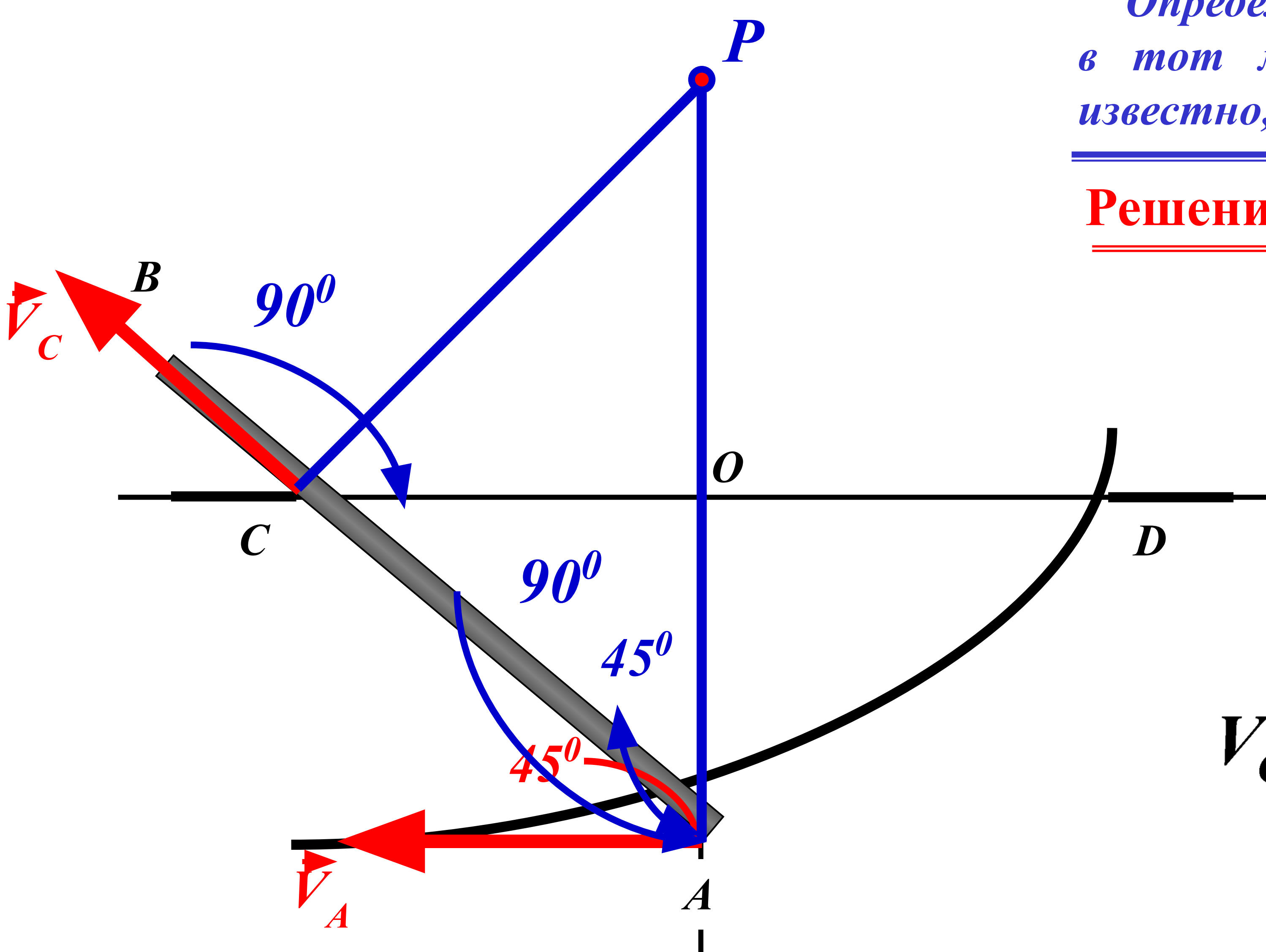
4. Плоскопараллельное движение

4.5. Примеры решения задач

4.5.1. Пример 1

Прямая AB движется в плоскости рисунка, причем конец ее A все время находится на полуокружности CAD, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку C диаметра CD.

Определить скорость V_C точки прямой, совпадающей с точкой C, в тот момент, когда радиус OA перпендикулярен CD, если известно, что скорость точки A в этот момент равна 4 м/с.



Решение:

2-й способ:

Построение мгновенного центра скоростей

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{PC}{PA}; \quad V_C = \frac{V_A \cdot PC}{PA};$$

$$PC = PA \cdot \sin 45^0;$$

$$V_C = \frac{V_A \cdot PA \cdot \sin 45^0}{PA} = 4 \cdot 0.707 = 2.83 \text{ м/с}.$$

Ответ: $V_C = 2.83$ м/с

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.5. Примеры решения задач

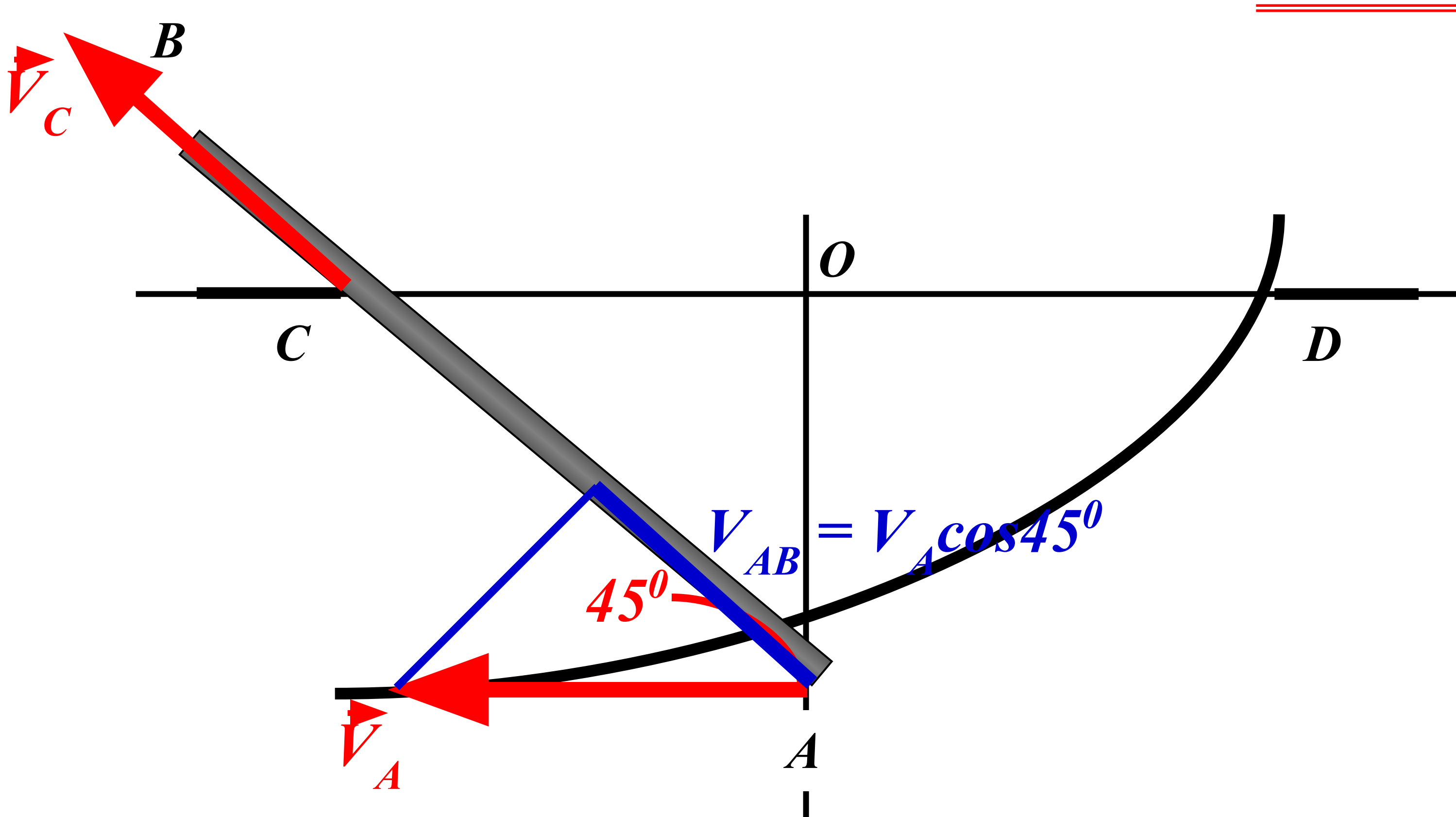
4.5.1. Пример 1

*Прямая **AB** движется в плоскости рисунка, причем конец ее **A** все время находится на полуокружности **CAD**, а сама прямая все время проходит через неподвижную точку **C** диаметра **CD**.*

*Определить скорость V_C точки прямой, совпадающей с точкой **C**, в тот момент, когда радиус **OA** перпендикулярен **CD**, если известно, что скорость точки **A** в этот момент равна 4 м/с.*

Решение:

3-й способ:



Применение теоремы о равных проекциях

$$np_{AB}\left(\vec{V}_C\right) = np_{AB}\left(\vec{V}_A\right);$$

$$V_C = V_A \cos 45^0;$$

$$V_C = 4 \cdot 0.707 = 2.83 \; м/с.$$

Ответ: $V_C = 2.83 \; м/с$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.5. Примеры решения задач

4.5.2. Пример 2

Колесо катится без скольжения по горизонтальной поверхности. Скорость центра колеса равна V_0 = 10 м/с, радиус колеса R = 0.5 м. Определить угловую скорость колеса ω и скорости точек A, B, C в положении, указанном на чертеже.

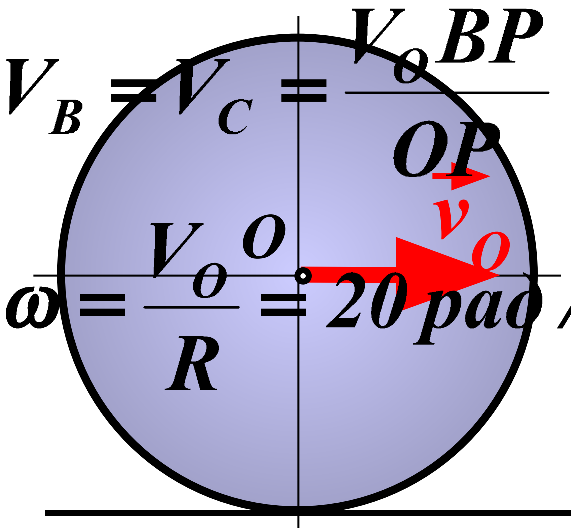
Решение: *Мгновенный центр скоростей колеса находится в точке касания с поверхностью качения.*

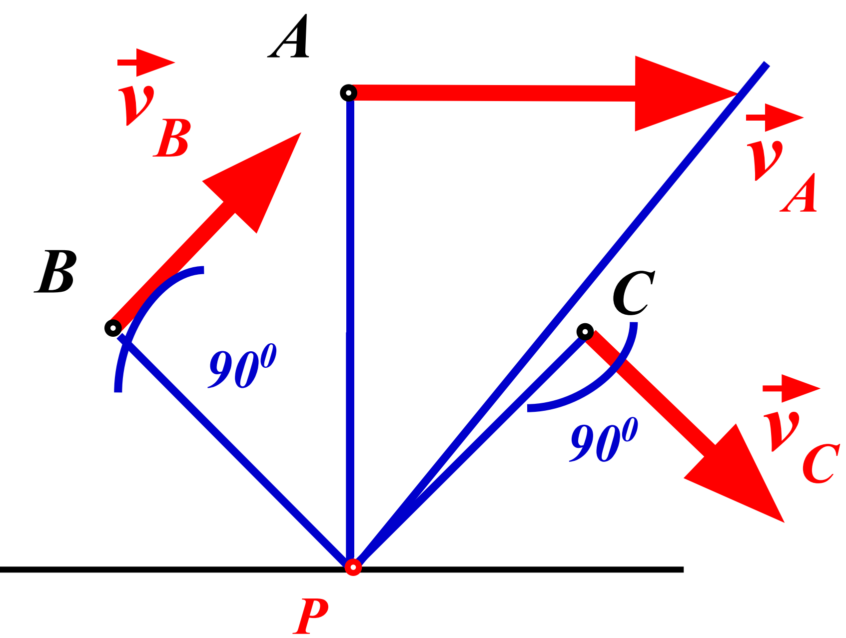
$$\frac{V_O}{OP} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP}; \quad AP = 2 \cdot AO; \; BP = CP = \sqrt{OP^2 + OP^2} = OP\sqrt{2} = R\sqrt{2};$$

$$V_A = \frac{V_O AP}{OP} = 2V_O = 20\ м/с;$$

$$V_B = V_C = \frac{V_O BP}{OP} = \sqrt{2}V_O = 14.1\ м/с;$$

$$\omega = \frac{V_O}{R} = 20\ рад/с$$





Ответ:

$V_A = 20\ м/с;$

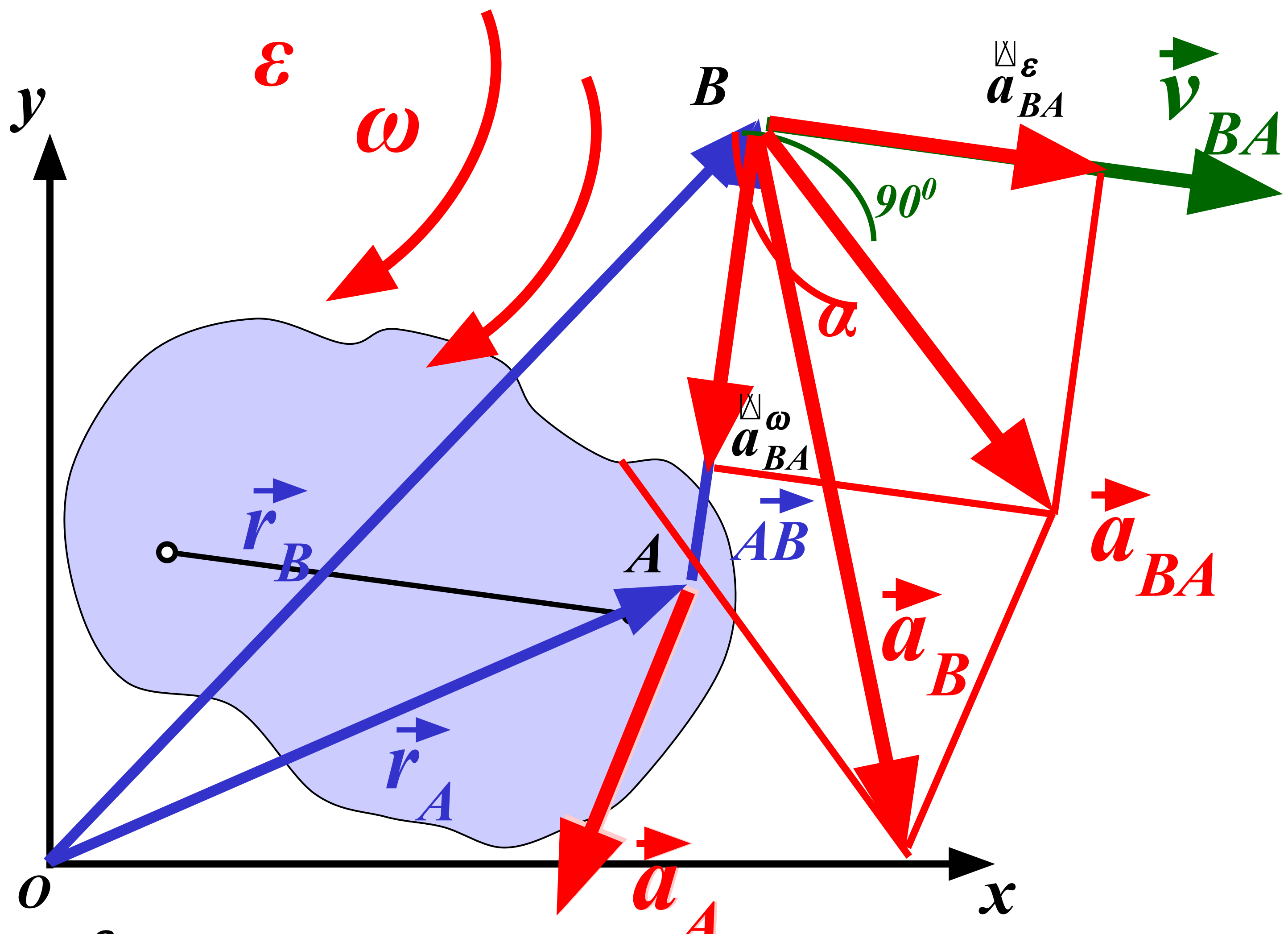
$V_B = V_C = 14.1\ м/с;$

$\omega = 20\ рад/с;$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.6. Теорема о сложении ускорений при плоскопараллельном движении



$$\vec v_B = \vec v_A + \vec v_{BA}, \quad \vec v_B = \vec v_A + \vec\omega \times \overrightarrow{AB},$$

$$\underbrace{\frac{d\vec v_B}{dt}}_{\vec a_B} = \underbrace{\frac{d\vec v_A}{dt}}_{\vec a_A} + \underbrace{\frac{d\vec\omega}{dt}}_{\vec\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec\omega \times \frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt};$$

$$\frac{d\left(\overrightarrow{AB}\right)}{dt} = \vec\omega \times \overrightarrow{AB} = \vec v_{BA};$$

$$\vec a_B = \vec a_A + \boxed{\vec\varepsilon \times \overrightarrow{AB}} + \boxed{\vec\omega \times \vec v_{BA}};$$

$\vec\varepsilon \times \overrightarrow{AB}$: ${}^{1}/_{c^2} \cdot м = {}^{м}/_{c^2}$ — ускорение — $\vec a^{\varepsilon}_{BA} = \vec\varepsilon \times \overrightarrow{AB}$ направлено $\perp \overrightarrow{BA}$

$\vec\omega \times \vec v_{BA}$: ${}^{1}/_{c} \cdot {}^{м}/_{c} = {}^{м}/_{c^2}$ — ускорение — $\vec a^{\omega}_{BA} = \vec\omega \times \vec v_{BA}$ направлено по $\overrightarrow{BA}$

$$a^{\varepsilon}_{BA} = \varepsilon \cdot AB$$

$$a^{\omega}_{BA} = \omega \cdot v_{BA} = \omega \cdot \omega \cdot AB = \omega^2 AB$$

$$a_{BA} = \sqrt{\left(a^{\varepsilon}_{BA}\right)^2 + \left(a^{\omega}_{BA}\right)^2}$$

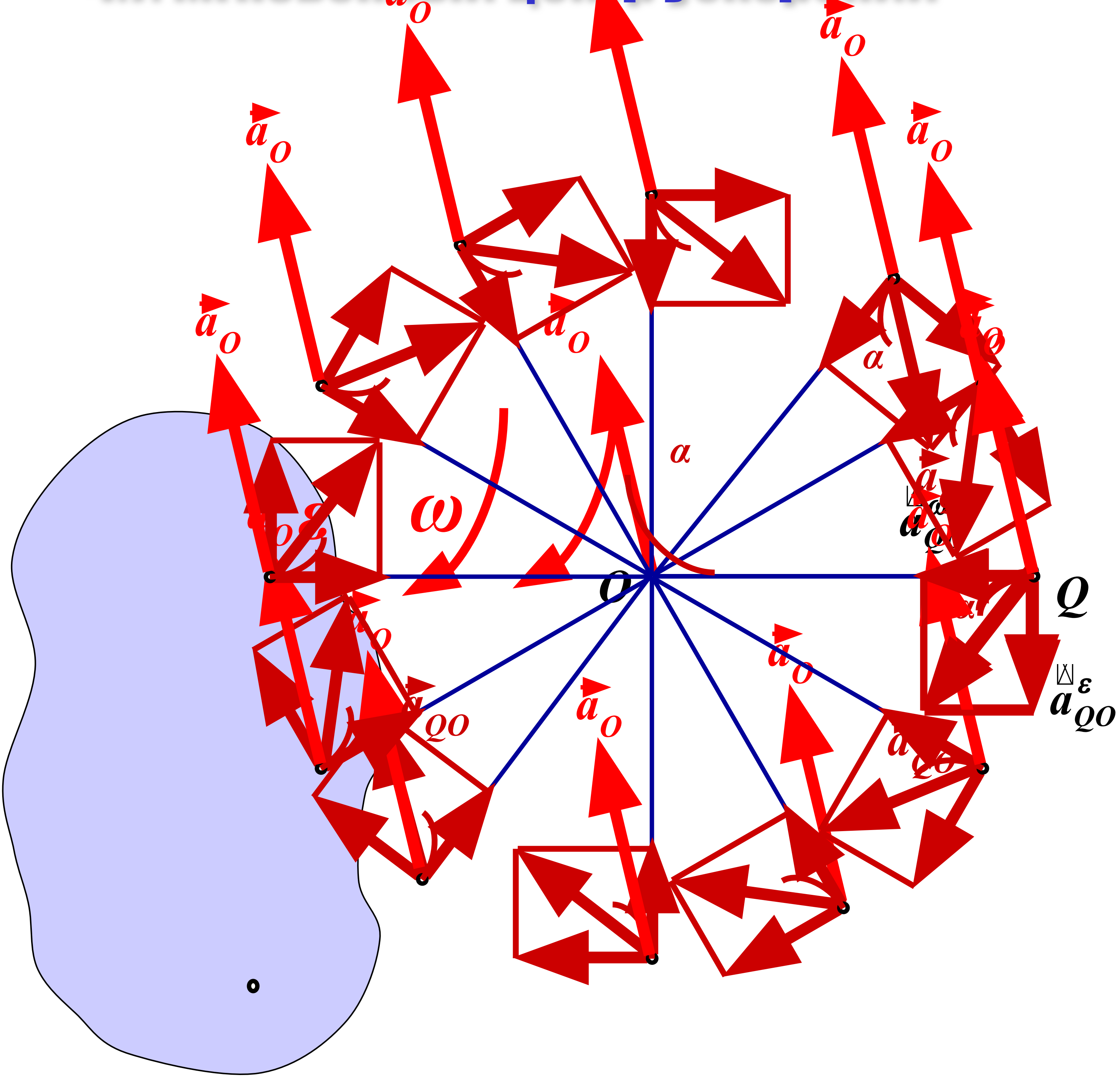
$$\boxed{\vec a_{BA} = \vec a^{\varepsilon}_{BA} + \vec a^{\omega}_{BA}} \qquad \boxed{tg(\alpha) = {}^{a^{\varepsilon}_{BA}}/_{a^{\omega}_{BA}} = {}^{\varepsilon}/_{\omega^2}}$$

$$\boxed{\vec a_B = \vec a_A + \vec a^{\varepsilon}_{BA} + \vec a^{\omega}_{BA}} \qquad \boxed{\vec a_B = \vec a_A + \vec a_{BA}}$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.7. Мгновенный центр ускорений



*В каждый момент времени при плоском движении при $\omega \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$ существует точка, ускорение которой равно 0 - **мгновенный центр ускорений (МЦУ)**. МЦУ – единственный в данный момент времени.*

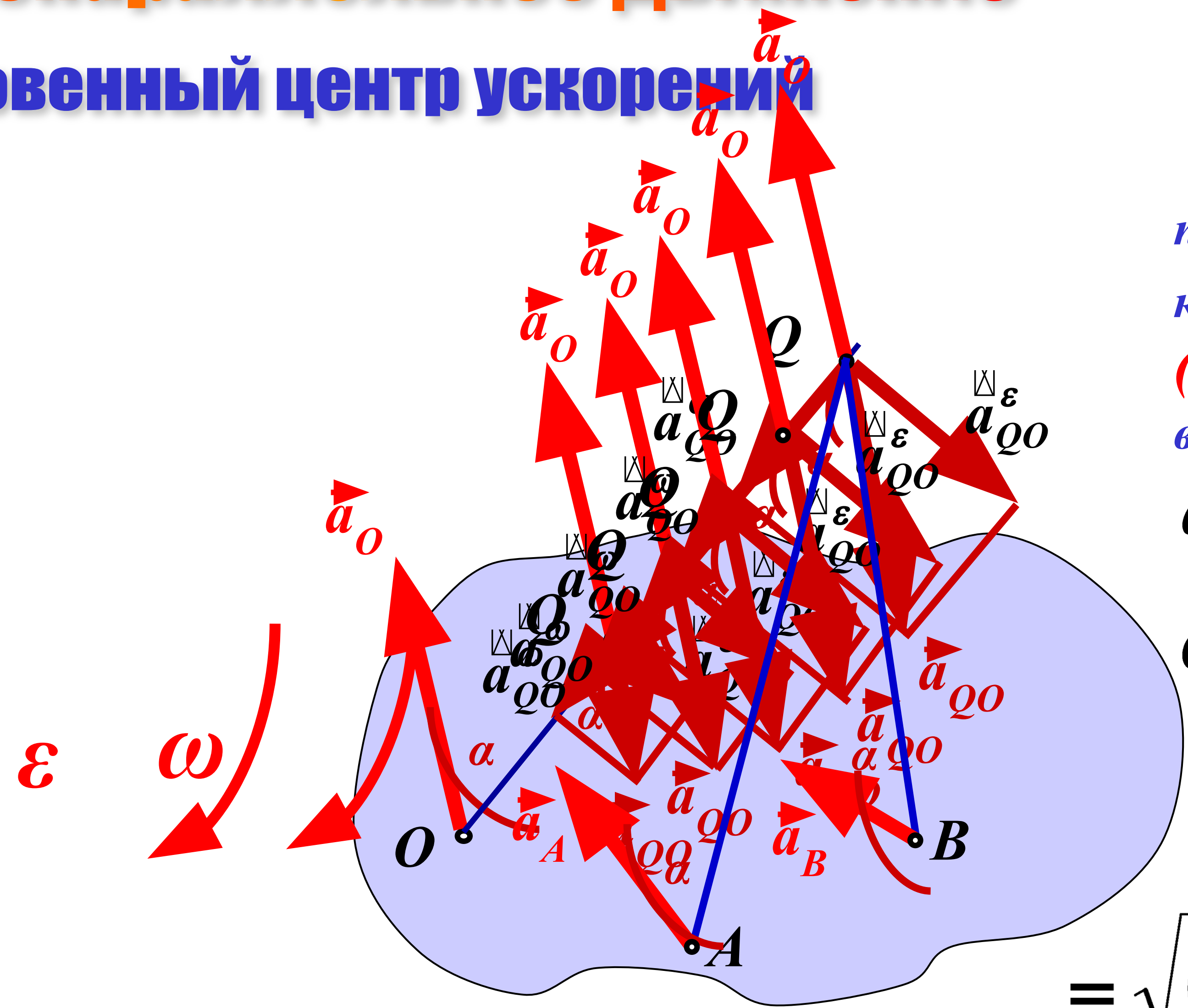
$$\vec a_Q = \vec a_{QO} + \vec a_O, \quad \text{если } \vec a_Q = 0, \text{ то } \vec a_O = -\vec a_{QO}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.7. Мгновенный центр ускорений



*В каждый момент времени при плоском движении при $\omega \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$ существует точка, ускорение которой равно 0 - **мгновенный центр ускорений (МЦУ)**. МЦУ – единственный в данный момент времени.*

$$\vec{a}_Q = \vec{a}_{QO} + \vec{a}_O, \quad \text{если } \vec{a}_Q = 0, \text{ то } \vec{a}_O = -\vec{a}_{QO}$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{\varepsilon}{\omega^2}\right).$$

$$a_O = a_{QO} = \sqrt{\left(a_{QO}^{\varepsilon}\right)^2 + \left(a_{QO}^{\omega}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(QO \cdot \varepsilon)^2 + \left(QO \cdot \omega^2\right)^2} = QO\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

$$OQ = \frac{a_O}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Расстояния от точек до мгновенного центра ускорений прямо пропорционально отношению ускорений этих точек.

Мгновенный центр ускорений находится в точке пересечения линий, проведенных из точек к их ускорениям по углом α.

$$a_A = a_{AQ} \rightarrow a_A = AQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}; \quad \frac{a_A}{a_B} = \frac{AQ}{BQ}; \quad tg(\alpha) = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

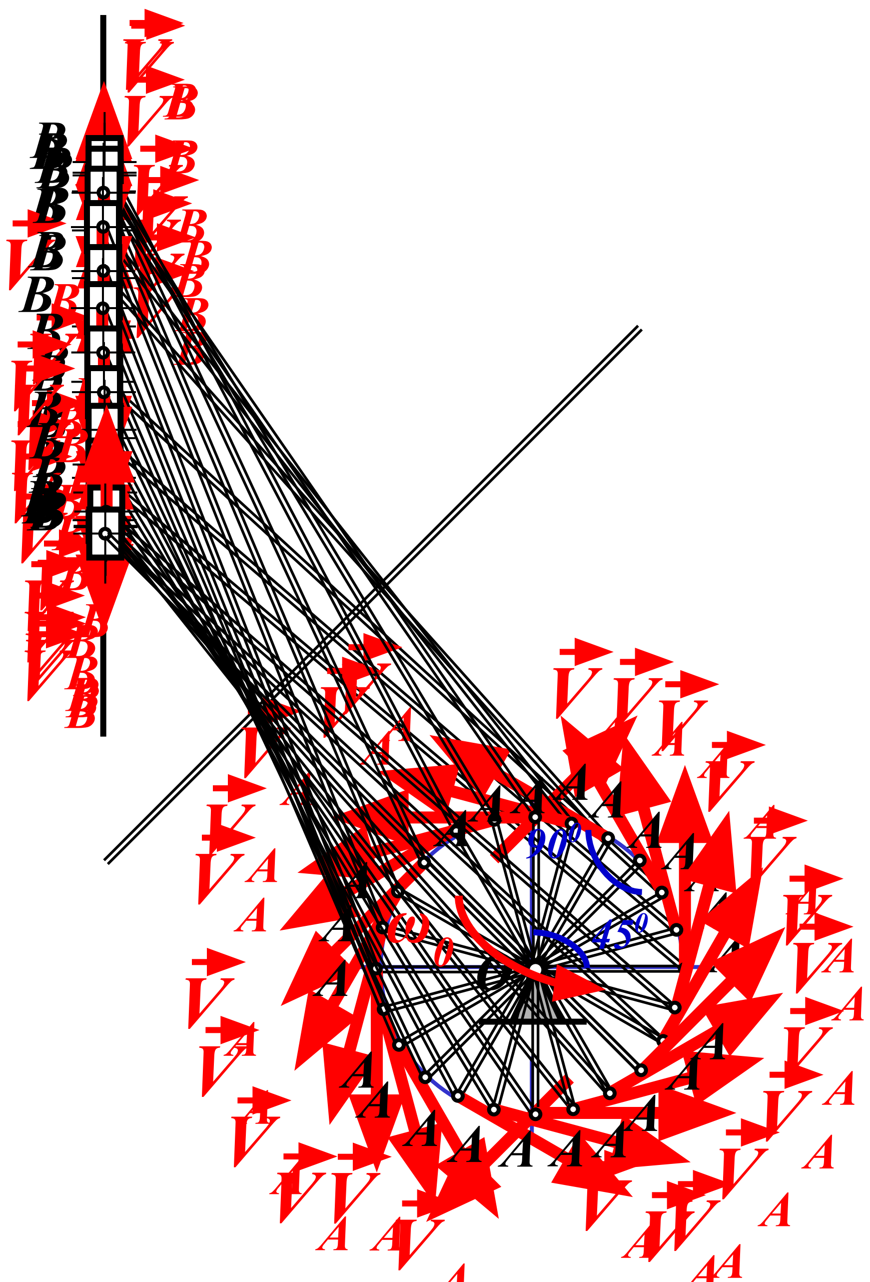
$$a_B = a_{BQ} \rightarrow a_B = BQ\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.1. Пример 1



Кривошип ***OA*** *длиной* *20 см* *вращается равномерно с угловой скоростью* $\omega_0 = 10$ *рад/с* *и приводит в движение шатун* ***AB*** *длиной* *100 см*.

Найти *угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна* ***B*** *в положении, указанном на чертеже.*

Решение:

Простейшие движения твердого тела

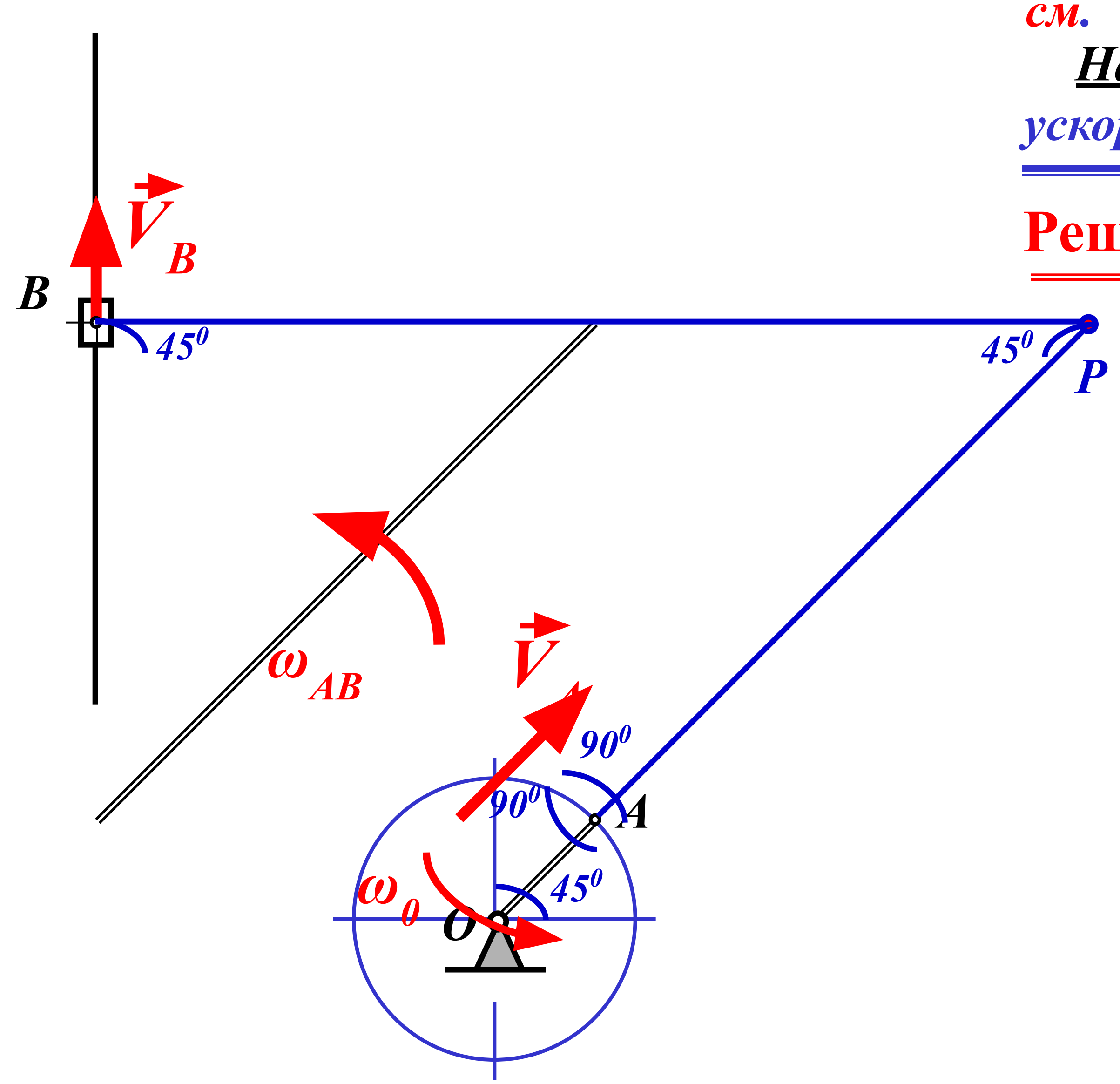
4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.1. Пример 1

Кривошип OA длиной 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 100 см.

***Найти** угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в положении, указанном на чертеже.*



Решение:

$$V_A = \omega_0 OA = 200\ см/с;$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP};$$

$$AP = AB = 100\ см;$$

$$BP = \sqrt{AB^2 + AP^2} = 100\sqrt{2} = 141\ см;$$

$$V_B = \frac{V_A BP}{AP} = \frac{200 \cdot 141}{100} = 282\ см/с;$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{200}{100} = 2\ рад/с;$$

Простейшие движения твердого тела

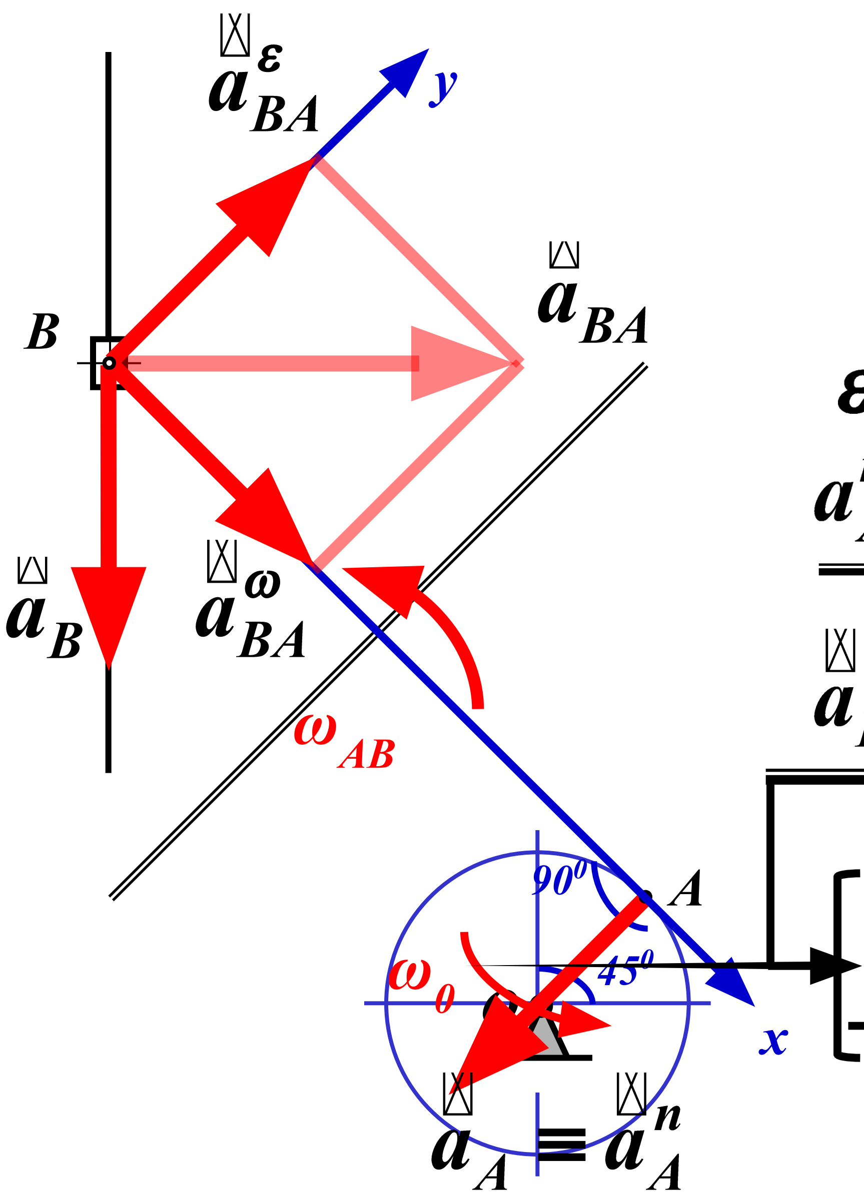
4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.1. Пример 1

Кривошип OA длиной 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10$ рад/с и приводит в движение шатун AB длиной 100 см.

Найти *угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна B в положении, указанном на чертеже.*



Решение: $\vec a_A = \vec a^n_A + \vec a^\tau_A; \quad a^\tau_A = \varepsilon_0 \cdot OA;$

$$\varepsilon_0 = d\omega_0/dt = 0, \ \text{т.к. } \omega_0 - const; \ \Rightarrow \ \vec a^\tau_A = 0;$$

$$a^n_A = \omega_0^2 \cdot OA = 2000\ см/с^2; \qquad a_A = a^n_A = 2000\ см/с^2;$$

$$\vec a_B = \vec a_A + \vec a^\omega_{BA} + \vec a^\varepsilon_{BA};$$

$$a^\omega_{BA} = \omega^2_{AB} \cdot AB = 4 \cdot 100 = 400\ см/с^2;$$

$$a^\varepsilon_{BA} = \varepsilon_{AB} \cdot AB;$$

$$\begin{cases} a_B \cos 45^0 = a^\omega_{BA}; & a_B = 400/0.707 = 565.7\ см/с^2; \\ -a_B \sin 45^0 = -a_A + a^\varepsilon_{BA}; & a^\varepsilon_{BA} = a_A - a_B \sin 45^0 = 1600\ см/с^2; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{AB} = a^\varepsilon_{BA}/AB = 1600/100 = 16\ рад/с^2.$$

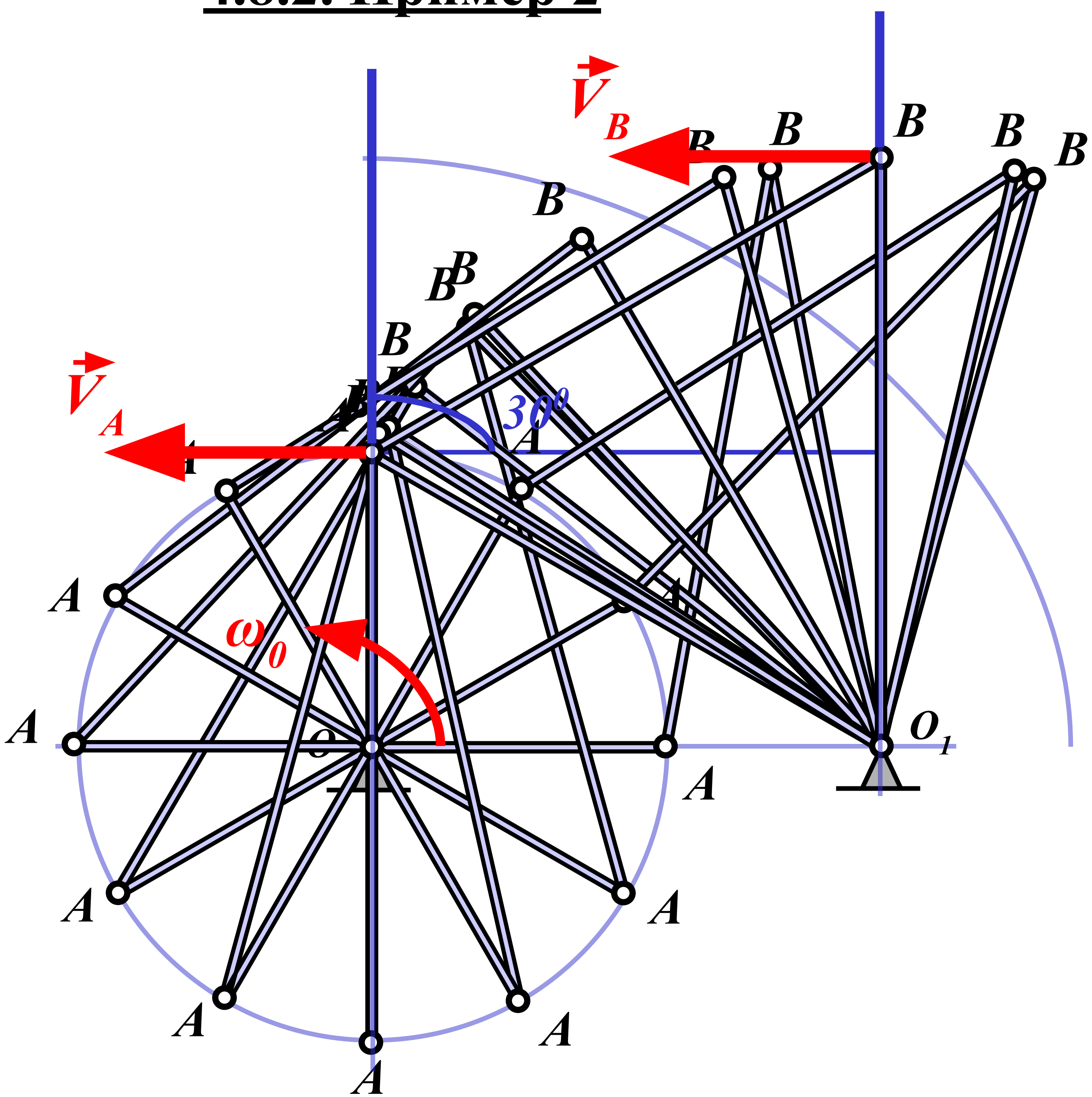
Ответ: $\omega_{AB} = 2\ рад/с;\ a_B = 565.7\ см/с^2;\ \varepsilon_{AB} = 16\ рад/с^2.$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.2. Пример 2



*Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ у которого $AB=2OA=2a$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. **Найти** угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на чертеже.*

Решение:

$$V_A = \omega_0 OA = a \cdot \omega_0;$$

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP};$$

$$AP = BP = \infty;$$

$$V_B = V_A = a \cdot \omega_0;$$

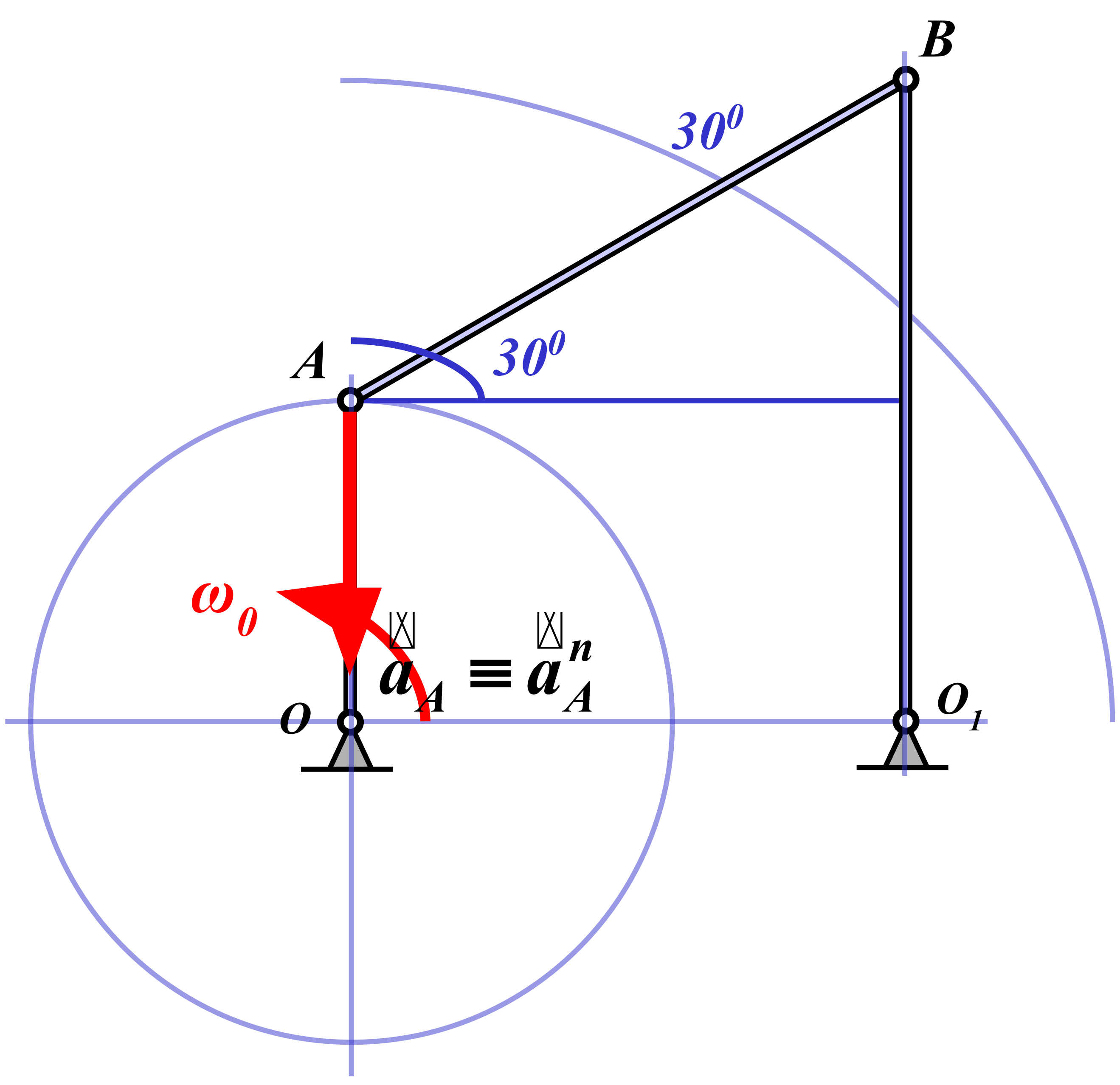
$$\omega_{AB} = 0$$

Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.2. Пример 2



*Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ у которого AB=2OA=2a вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. **Найти** угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на чертеже.*

Решение:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot OA;$$

$$\varepsilon_0 = d\omega_0 / dt = 0, \;\; т.к. \; \omega_0 - const;$$

$$\vec{a}_A^\tau = 0;$$

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot OA = \omega_0^2 \cdot a;$$

$$a_A = a_A^n = \omega_0^2 \cdot a;$$

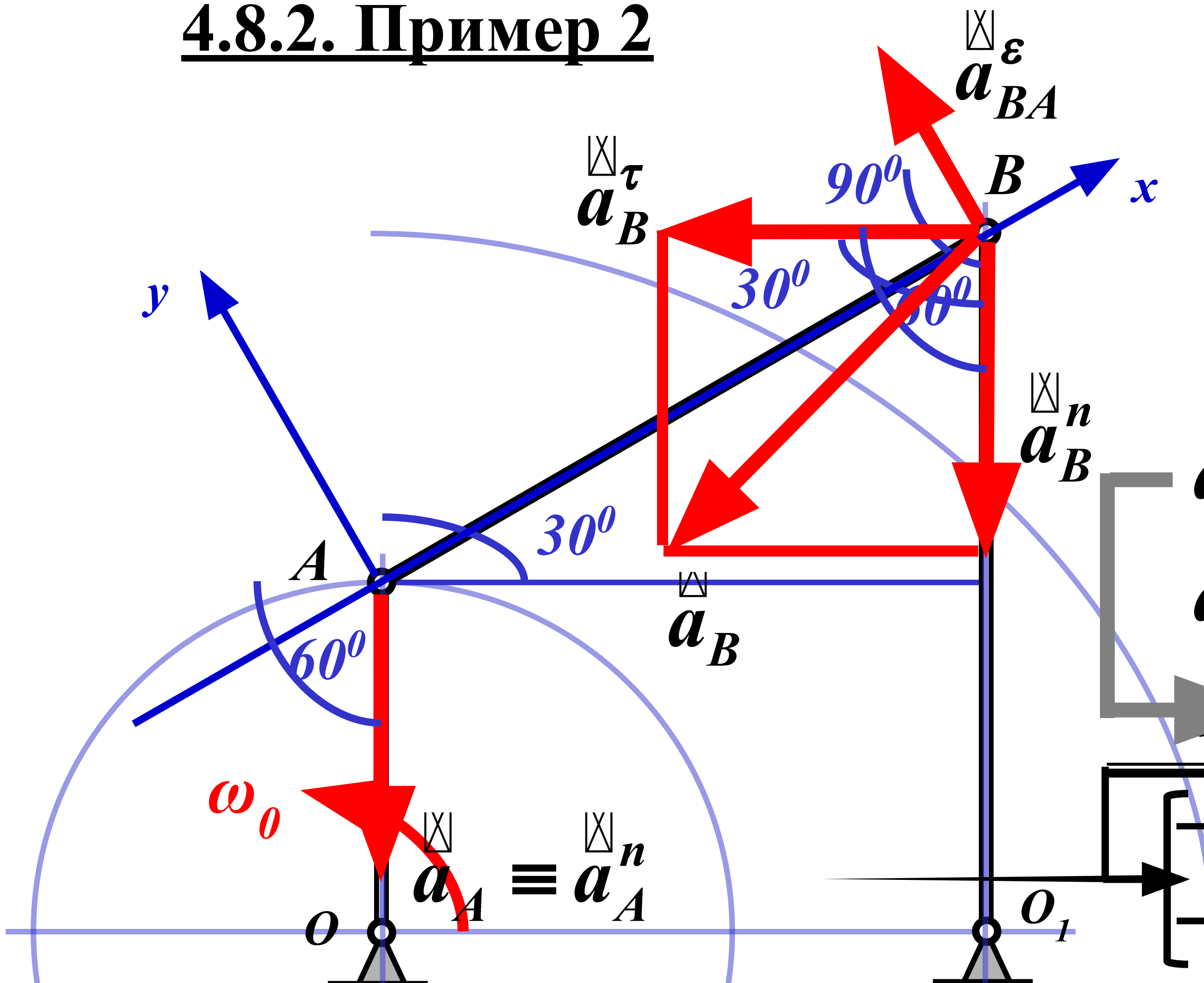
Простейшие движения твердого тела

4. Плоскопараллельное движение

4.8. Примеры решения задач

4.8.2. Пример 2

*Стержень OA шарнирного четырехзвенника $OABO_1$ у которого $AB=2OA=2a$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_0. **Найти** угловую скорость, угловое ускорение стержня AB, а также ускорение шарнира B в положении, указанном на чертеже.*



Решение:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon};$$

$$a_{BA}^{\omega} = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0;$$

$$a_{BA}^{\varepsilon} = \varepsilon_{AB} \cdot AB;$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau};$$

$$a_B^n = V_B^2 / O_1B = \omega_0^2 a/2;$$

$$a_B^{\tau} = \varepsilon_{O_1B} \cdot O_1B;$$

$$\vec{a}_B^n + \vec{a}_B^{\tau} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\omega} + \vec{a}_{BA}^{\varepsilon};$$

$$\begin{cases} -a_B^n \cos 60^0 - a_B^{\tau} \cos 30^0 = -a_A \cos 60^0; \\ -a_B^n \sin 60^0 + a_B^{\tau} \sin 30^0 = -a_A \sin 60^0 + a_{BA}^{\varepsilon}; \end{cases}$$

$$a_B^{\tau} = \omega_0^2 a \frac{\sqrt{3}}{6}; \; a_B = \sqrt{\left(a_B^n\right)^2 + \left(a_B^{\tau}\right)^2} = \omega_0^2 a \frac{\sqrt{3}}{3}; \; a_{BA}^{\varepsilon} = \omega_0^2 a \frac{\sqrt{3}}{3}; \varepsilon_{AB} = \omega_0^2 \frac{\sqrt{3}}{6};$$

Ответ: $\omega_{AB} = 0; \; a_B = \omega_0^2 a \frac{\sqrt{3}}{3}; \; \varepsilon_{AB} = \omega_0^2 \frac{\sqrt{3}}{6};$