Билет 8

1. Описанная и вписанная окружности четырехугольника. Свойства вписанного и описанного четырехугольников

2. Теорема Фалеса с доказательством, теорема о пропорциональных отрезках, теорема о медианах

3. Задача

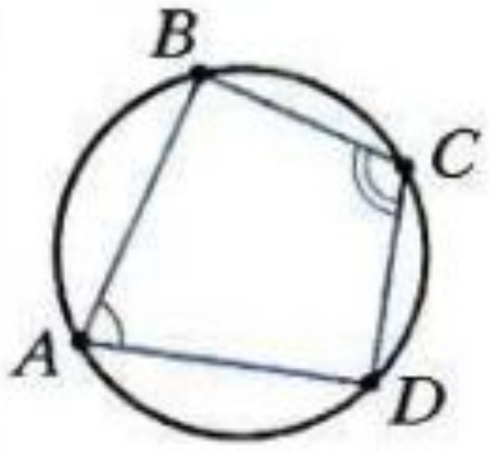
Билет 8

1. Описанная и вписанная окружности четырехугольника. Свойства вписанного и описанного четырехугольников

Определение

Окружность называют описанной около четырёхугольника, если она проходит через все его вершины.

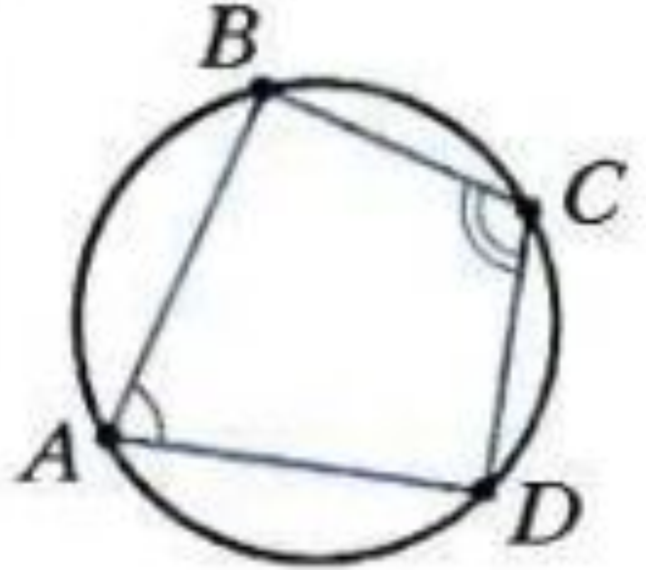
В этом случае говорят, что четырёхугольник **вписан** в окружность.



Теорема 10.1 (свойство вписанного в окружность четырехугольн

Если четырёхугольник является вписанным в окружность, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

Есл
и



т
о

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

Теорема 10.2
(обратная теореме 10.1)

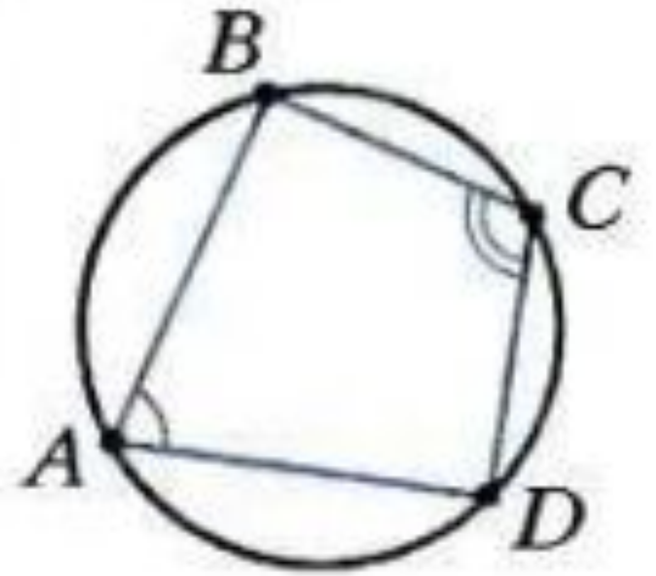
Если в четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.

Если

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

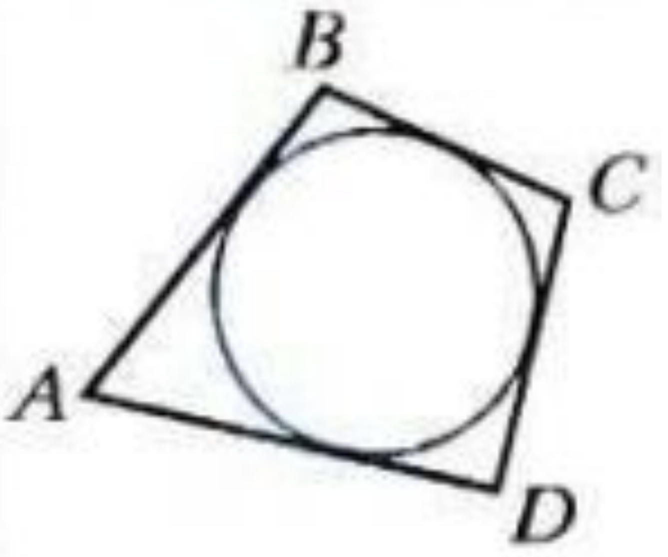
то



Определение

Окружность называют вписанной в четырёхугольник, если она касается всех его сторон.

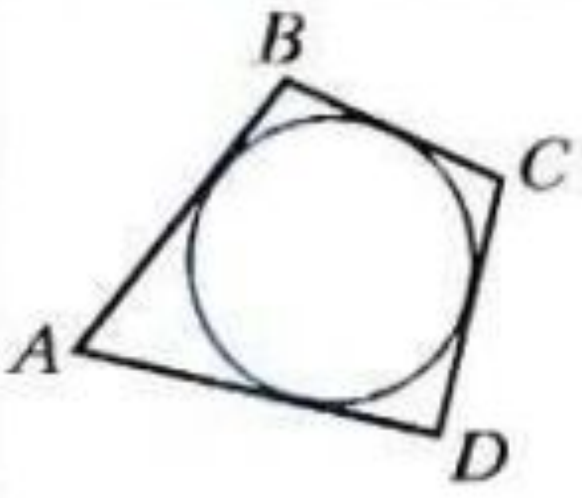
также говорят, что четырёхугольник **описан** около окружности.



Теорема 10.3 (свойство описанного около окружности четырехугольника

Если четырёхугольник является описанным около окружности, то суммы его противолежащих сторон равны.

Если



то

$$AB + CD = BC + AD.$$

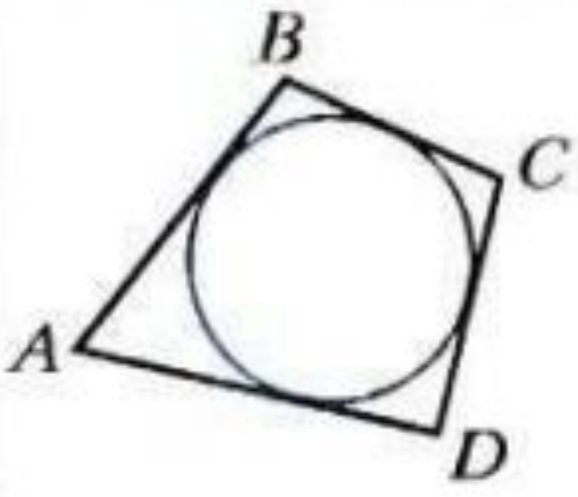
Теорема 10.4

Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

Есл
и

$$AB + CD = BC + AD.$$

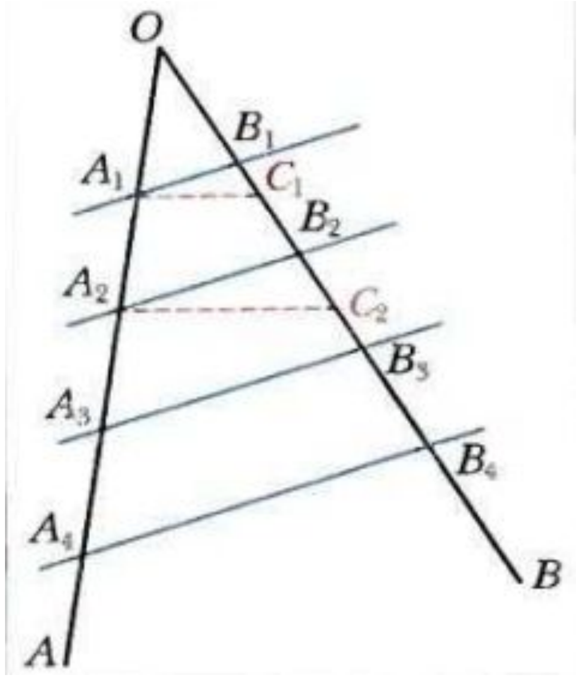
т
о



2. Теорема Фалеса с доказательством, теорема о пропорциональных отрезках, теорема о медианах

Теорема 11.1
(теорема Фалеса)

Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.



Дано:

$\angle AOB$

$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \dots$

$A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, ...

Доказать:

$OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \dots$.

Доказательство (от противного)

Предположим, что $OB_1 \neq B_1B_2$. Пусть C_1 – середина отрезка OB_2 $\Rightarrow$ A_1C_1 – средняя линия треугольника A_2OB_2. $\Rightarrow$ $A_1C_1 \parallel A_2B_2$ $\Rightarrow$ через точку A_1 проходят две прямые, параллельные прямой A_2B_2, что противоречит аксиоме параллельных прямых $\Rightarrow$ $OB_1 = B_1B_2$

Предположим, что $B_1B_2 \neq B_2B_3$.
Пусть серединой отрезка B_1B_3
является некоторая точка C_2.
Тогда отрезок A_2C_2 – средняя линия
трапеции $A_3A_1B_1B_3$. Отсюда $A_2C_2 \parallel A_3B_3$.
Значит, через точку A_2 проходят
две прямые, параллельные прямой A_3B_3.
Мы пришли к противоречию.
Следовательно, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогично доказывают, что $B_2B_3 = B_3B_4$ и т. д. ◄

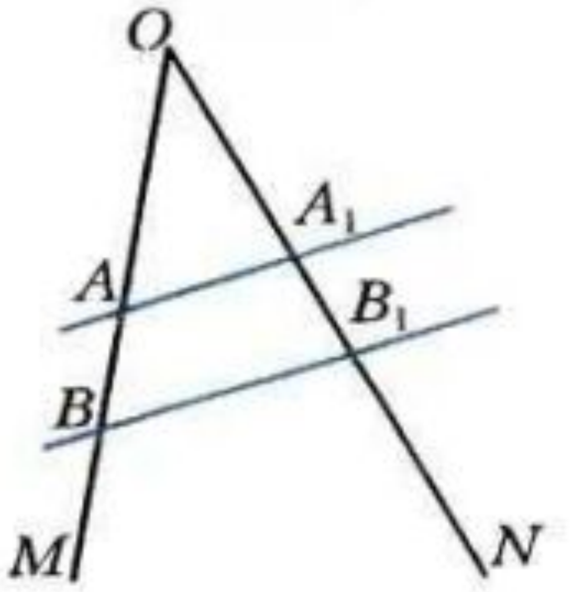
Теорема 11.2

(теорема о пропорциональных отрезках)

Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

Если $AA_1 \parallel BB_1$

то $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$ $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$



Теорема 11.3

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$$