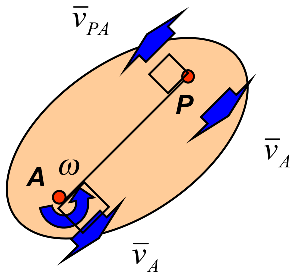
Лекция 4 (продолжение 4.3)

- **Мгновенный центр скоростей (МЦС) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю.**



Пусть известна скорость одной из точек фигуры и угловая скорость вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для скорости некоторой точки *P* согласно теоремы о сложении скоростей:

$$\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega}\times\bar{r}_{AP} = \bar{v}_A + \bar{v}_{PA}.}$$

Зададим значение скорости этой точки *P* равной нулю: $\boxed{\bar{v}_P = 0.}$

Тогда получаем: $\bar{v}_{PA} = \bar{\omega}\times\bar{r}_{AP} = -\bar{v}_A.$ Т.е. вращательная скорость искомой точки должна быть равна по модулю скорости точки А, параллельна этой скорости и направлена в противоположную сторону.

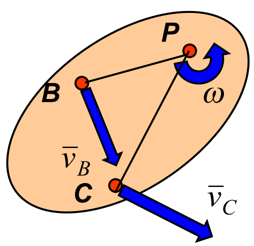
Это позволяет найти положение МЦС (точки *P)*, а именно: МЦС должен находиться на перпендикуляре к скорости точки *А,* отложенном в сторону угловой скорости, на расстоянии:

$$\boxed{AP = \frac{v_A}{\omega}.}$$

Если положение МЦС найдено, скорость любой точки плоской фигуры может быть легко определена посредством выбора полюса в МСЦ . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении скоростей вырождается в известную зависимость скорости от расстояния до центра вращения:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{v}_B = \bar{v}_P + \bar{\omega}\times\bar{r}_{PB} = \bar{v}_{BP}; & (\bar{v}_P = 0); & v_B = \omega\cdot BP; \\ \bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{\omega}\times\bar{r}_{PC} = \bar{v}_{CP}; & (\bar{v}_P = 0); & v_C = \omega\cdot CP; \end{array}}$$

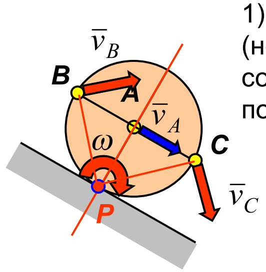
Другими словами, можно утверждать, что **в любой момент времени тело не совершает никакого другого движения, кроме как вращательного движения вокруг МЦС**.



Лекция 5

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры –** Поскольку при движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка (МЦС), жестко связанная с плоской фигурой, скорость которой в этот момент равна нулю, то при определении скоростей эту точку и следует выбирать в качестве полюса, играющего роль центра вращения в данный момент времени.
- Ниже рассмотрим процедуру определения скоростей на примерах:

1 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, положения точек *A*, *B*, *C*,проскальзывание отсутствует.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$ (нет проскальзывания и точка с нулевой скоростью совпадает с точкой контакта колеса и неподвижной поверхностью качения).

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

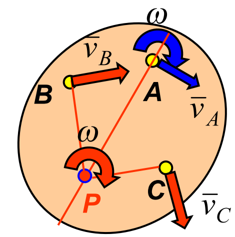
Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону вектора линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

2 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, ω ,положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на перпендикуляре к вектору $\boldsymbol{v}_A$

2) Определяем расстояние до МЦС: $\boxed{AP = \dfrac{v_A}{\omega}.}$

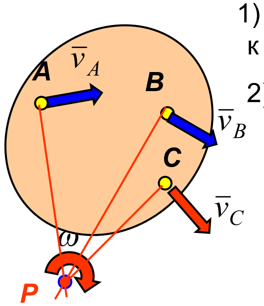
Расстояние *AP* откладываем в сторону дуговой стрелки угловой скорости. Дуговую стрелку угловой скорости изображаем вокруг МЦС.

3) Соединяем точки *B* и *C* с МЦС и определяем скорости этих точек:

$$\boxed{\begin{aligned} v_B &= \omega \cdot BP; \\ v_C &= \omega \cdot CP. \end{aligned}}$$

Векторы линейных скоростей $\boldsymbol{v}_B$ и $\boldsymbol{v}_C$ направлены в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

3 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$,

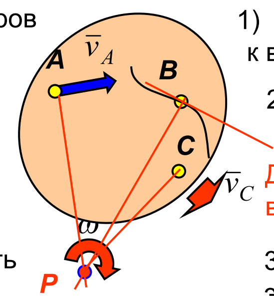
2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP} = \dfrac{v_B}{BP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A$,$\boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

4 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, траектория точки *B*, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$,



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к вектору $\boldsymbol{v}_A$ и касательной к траектории точки *B*.

2) Определяем угловую скорость: $\boxed{\omega = \dfrac{v_A}{AP}.}$

Дуговая стрелка угловой скорости направлена в сторону векторов линейной скорости $\boldsymbol{v}_A$.

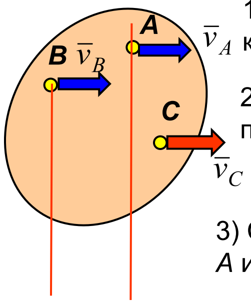
3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки: $\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

Лекция 5 (продолжение 5.2)

- **Примеры использования МЦС для определения скоростей точек плоской фигуры**

5 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эта точка находится в бесконечности.

2) Угловая скорость обращается в нуль (мгновенно поступательное движение):

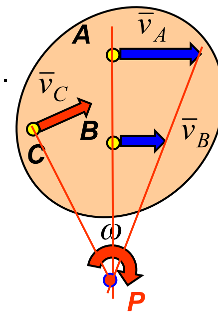
$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{\infty} = \frac{v_B}{\infty} = 0.}$$

3) Скорость точки *C* равна геометрически скоростям точек *A* и *B*:

$$\boxed{\bar{v}_C = \bar{v}_A = \bar{v}_B.}$$

Вектор скорости точки *C* направлен параллельно векторам скоростей точек *A* и *B* (в ту же сторону).

6 Дано: $\boldsymbol{v}_A$, $\boldsymbol{v}_B$, $\boldsymbol{v}_A \parallel \boldsymbol{v}_B$, положения точек *A*, *B*, *C*.
Найти: $\boldsymbol{v}_C$



1) МЦС находится на пересечении перпендикуляров к векторам $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$. Эти перпендикуляры сливаются в одну линию.

2) Определяем положение МЦС (проводим линию через концы векторов $\boldsymbol{v}_A$ и $\boldsymbol{v}_B$) и угловую скорость:

$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{AP} = \frac{v_B}{BP} = \frac{v_A - v_B}{AB}.}$$

Дуговую стрелку угловой скорости изображаем в сторону векторов линейных скоростей $\boldsymbol{v}_A, \boldsymbol{v}_B$.

3) Соединяем точку *C* с МЦС и определяем скорость этой точки:

$$\boxed{v_C = \omega \cdot CP.}$$

Вектор линейной скорости $\boldsymbol{v}_C$ направлен в сторону дуговой стрелки угловой скорости.

- **Теорема о сложении ускорений – Ускорение любой точки плоской фигуры равна геометрической сумме ускорения полюса и ускорения этой точки вокруг полюса.**

Скорости точек *A* и *B* связаны между собой соотношением:

$$\boxed{\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}.}$$

Продифференцируем это соотношение по времени:

$$\frac{d\bar{v}_B}{dt} = \frac{d\bar{v}_A}{dt} + \frac{d\bar{v}_{BA}}{dt} = \bar{a}_A + \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}).$$

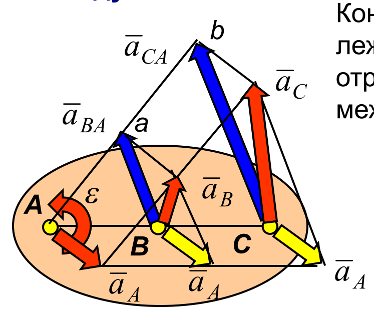
Второе слагаемое дифференцируем как произведение двух функций:

$$\frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}_{AB}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}_{AB}}{dt} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{AB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BA}.$$

Получили сумму вращательного и осестремительного ускорений рассматриваемой точки относительно полюса. Таким образом, ускорение точки плоской фигуры:

$$\boxed{\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^{\text{вр}} + \bar{a}_{BA}^{\text{ос}} = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}.}$$

- **Следствие – Концы векторов ускорений точек плоской фигуры, лежащих на одной прямой, также лежат на одной прямой и делят ее на отрезки, пропорциональные расстояниям между точками.**



Концы векторов ускорений точек $\boldsymbol{a}_{BA}$ и $\boldsymbol{a}_{CA}$ лежат на одной прямой *Abc* и делят ее на отрезки пропорциональные расстояниям между точками:

$$a_{BA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,AB,$$

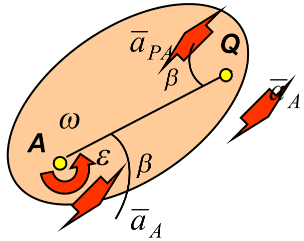
$$a_{CA} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,AC.$$

Концы векторов ускорений полюса *A*, изображенных в точках *B* и *C*, лежат также лежат на одной прямой.

Нетрудно доказать из подобия треугольников, что концы векторов суммарных ускорений точек *B* и *C* также лежат на одной прямой, и делят эту прямую на части, пропорциональные расстояниям между точками.

Лекция 5 (продолжение 5.3)

- **Мгновенный центр ускорений (МЦУ) – При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка, жестко связанная с плоской фигурой, ускорение которого в этот момент равна нулю.**



Пусть известно ускорение одной из точек фигуры, угловая скорость и угловое ускорение вокруг этой точки:

Запишем векторное соотношение для ускорения некоторой точки Q согласно теоремы о сложении ускорений:

$$\boxed{\bar{a}_Q = \bar{a}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AQ} + \bar{\varepsilon} \times \bar{v}_{QA} = \bar{a}_A + \bar{a}_{PA}.}$$

Зададим значение ускорения этой точки Q равной нулю: $\boxed{\bar{a}_Q = 0.}$

Тогда получаем: $\bar{a}_{PA} = -\bar{a}_A.$

Т.е. ускорение искомой точки при вращении вокруг полюса должно быть равно по модулю ускорению точки А, параллельно этому ускорению и направлено в противоположную сторону.

Угол между вектором полного ускорения точки при вращении относительно центра равен: $\boxed{\beta = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}.}$

Это позволяет найти положение МЦУ (точки *Q*), а именно: МЦУ должен находиться прямой, составляющей угол β к вектору ускорения точки *A*, проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии: $\boxed{AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.}$

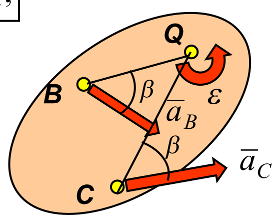
Если положение МЦУ найдено, ускорение любой точки плоской фигуры может быть легко определено посредством выбора полюса в МСУ . В этом случае векторное выражение теоремы о сложении ускорений вырождается в известную зависимость полного ускорения от расстояния до центра вращения:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{QB} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{BQ} = \bar{a}_{BQ}; \qquad (\bar{a}_Q = 0); \qquad a_B = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot BQ;$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_Q + \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_{QC} + \bar{\omega} \times \bar{v}_{CQ} = \bar{a}_{CQ}; \qquad (\bar{a}_Q = 0); \qquad a_C = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot CQ;$$

Таким образом, **при определении ускорений точек плоской фигуры в данный момент времени можно считать, что тело совершает вращательное движение вокруг МЦУ**.

Внимание: На самом деле в данный момент тело вращается вокруг МЦС, положение которого в общем случае не совпадает с положением МЦУ.

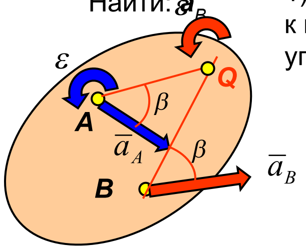


- **Примеры использования МЦУ для определения ускорений точек плоской фигуры**

1

Дано: $\boldsymbol{a}_A$, ε, ω, положения точек *A*, *B*.

Найти: $\boldsymbol{a}_B$



1) МЦУ находится на прямой , составляющей угол β к вектору ускорения точки *A*, проведенной в сторону углового ускорения, на расстоянии: $\boxed{\beta = arctg\,\frac{\varepsilon}{\omega^2}.}$

$$\boxed{AQ = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.}$$

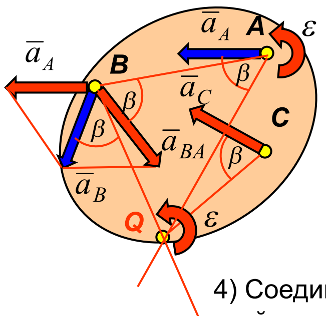
2) Соединяем точку *B* с МЦУ и определяем ускорение этой точки: $\boxed{a_B = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,QB.}$

Если ε = 0 и *ω* ≠ 0, то *β* = 0 и $AQ = \frac{a_A}{\omega^2}.$
Ускорения всех точек будут направлены в точку Q (МЦУ).

Если *ε* ≠ 0 и *ω* = 0, то *β* = 90º и $AQ = \frac{a_A}{\varepsilon}.$
Ускорения всех точек будут перпендикулярны отрезкам, соединяющим точки с МЦУ, и направлены в сторону углового ускорения.

- **Примеры использования МЦУ для определения ускорений точек плоской фигуры**

2 Дано: $\boldsymbol{a}_A$, $\boldsymbol{a}_B$, положения точек *A, B, C*.
Найти: $\boldsymbol{a}_C$



1) Запишем теорему о сложении ускорений и найдем ускорение точки *B* во вращении вокруг полюса *A*:

$$\boxed{\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}.}$$

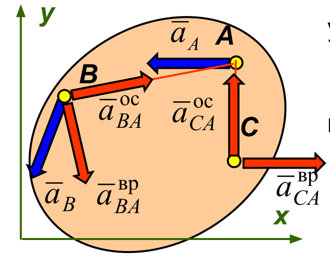
2) Определим угол *β* между вектором $\boldsymbol{a}_{BA}$ и прямой *AB* и направление дуговой стрелки углового ускорения:

3) МЦУ находится на пересечении прямых, повернутых на угол β от векторов ускорений точек *A* и *B* в сторону дуговой стрелки углового ускорения:

4) Соединяем точку *C* с МЦУ и определяем ускорение этой точки из одного из соотношений: и направляем вектор ускорения под углом *β* к отрезку QC в сторону дуговой стрелки углового ускорения.

$$\boxed{\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_C}{CQ}.}$$

Использование МЦУ связано с геометрическим построениями и решениями косоугольных треугольников, что не совсем удобно в общем случае. Можно решить эту задачу алгебраически с помощью проекций:



1) Запишем теорему о сложении ускорений для точек *B* и *A*:

$$\boxed{\overline{a}_B = \overline{a}_A + \overline{a}_{BA}^{\text{вр}} + \overline{a}_{BA}^{\text{ос}}.}$$

и изобразим компоненты ускорений:

2) Спроецируем уравнение на координатные оси:

$$a_{Bx} = a_{Ax} + a_{BAx}^{\text{вр}} + a_{BAx}^{\text{ос}} = a_{Ax} + \varepsilon AB\cos(\overline{a}_{BA}^{\text{вр}}, x) + \omega^2 AB\cos(\overline{a}_{BA}^{\text{ос}}, x),$$

$$a_{By} = a_{Ay} + a_{BAy}^{\text{вр}} + a_{BAy}^{\text{ос}} = a_{Ay} + \varepsilon AB\cos(\overline{a}_{BA}^{\text{вр}}, y) + \omega^2 AB\cos(\overline{a}_{BA}^{\text{ос}}, y).$$

3) Из этих уравнений можно найти угловые скорость и ускорение.

4) Запишем теорему о сложении ускорений для точек *C* и *A*: и изобразим компоненты ускорений:

$$\boxed{\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}^{\text{вр}} + \overline{a}_{CA}^{\text{ос}}.}$$

5) Спроецируем уравнение на координатные оси:

$$a_{Cx} = a_{Cx} + a_{CAx}^{\text{вр}} + a_{CAx}^{\text{ос}} = a_{Cx} + \varepsilon AC\cos(\overline{a}_{CA}^{\text{вр}}, x) + \omega^2 AC\cos(\overline{a}_{CA}^{\text{ос}}, x),$$

$$a_{Cy} = a_{Cy} + a_{CAy}^{\text{вр}} + a_{CAy}^{\text{ос}} = a_{Cy} + \varepsilon AC\cos(\overline{a}_{CA}^{\text{вр}}, y) + \omega^2 AC\cos(\overline{a}_{CA}^{\text{ос}}, y).$$