

Иррациональные неравенства:

виды и способы решения

п.1. Неравенства вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} > c \quad \text{и} \quad \sqrt[2n]{f(x)} \geq c$$

	$c < 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} > c$ $c = 0$	$c > 0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) \geq 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) > c^{2n}$
Пример 1	$\sqrt[4]{2x-5} > -1 \Leftrightarrow 2x-5 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \geq 2,5$ Ответ: $[2,5; +\infty)$	Пример 2 $\sqrt[4]{3-x} > 0 \Leftrightarrow 3-x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x < 3.$ Ответ: $(-\infty; 3)$	Пример 3 $\sqrt{4+x} > 5 \Leftrightarrow 4+x > 25$ $\Leftrightarrow x > 21.$ Ответ: $(21; +\infty)$

	$c < 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c$ $c = 0$	$c > 0$
1	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c \Leftrightarrow f(x) \geq 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$	$\sqrt[2n]{f(x)} \geq c \Leftrightarrow f(x) \geq c^{2n}$
Пример 4	$\sqrt[12]{1-x^2} \geq -6 \Leftrightarrow 1-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ ответ: $[-1; 1]$	Пример 5 $\sqrt[8]{\frac{2x-5}{1-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-5}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 1 < x \leq 2,5.$ ответ: $(1; 2,5]$	Пример 6 $\sqrt{ x +1} \geq 3 \Leftrightarrow x +1 \geq 9$ $\Leftrightarrow x \geq 8.$ ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$

п.2. Неравенства вида

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > c \quad \text{и} \quad {}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \geq c$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) > c^{2n+1} \quad {}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \geq c \Leftrightarrow f(x) \geq c^{2n+1}$$

Пример 7. Решить неравенство $\sqrt[3]{3-2x} \geq 5$

Решение

$$\sqrt[3]{3-2x} \geq 5 \Leftrightarrow 3-2x \geq 5^3 \Leftrightarrow -2x \geq 122 \Leftrightarrow x \leq -61.$$

ответ: $(-\infty; -61]$

п 3. Неравенства вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} < c \quad \text{и} \quad \sqrt[2n]{f(x)} \leq c$$

		$\sqrt[2n]{f(x)} < c$			
		$c < 0$	$c = 0$	$c > 0$	
1	$\sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \emptyset$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \emptyset$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < c^{2n} \end{cases}$
Пример 8	$\sqrt{7-2x} < -9 \Leftrightarrow \emptyset.$ ответ: $\emptyset.$	Пример 9	$\sqrt{x^2-x-2} < 0 \Leftrightarrow \emptyset$ ответ: \emptyset	Пример 10	$\sqrt{6-x} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 6-x \geq 0, \\ 6-x < 9 \end{cases}$ $\Leftrightarrow -3 < x \leq 6.$ ответ: $(-3; 6].$

		$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c$			
		$c < 0$	$c = 0$	$c > 0$	
1	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c \Leftrightarrow \emptyset$	2	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$	3	$\sqrt[2n]{f(x)} \leq c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq c^{2n} \end{cases}$
Пример 11	$\sqrt{\frac{2-x}{x+3}} \leq -5 \Leftrightarrow \emptyset.$ Ответ: \emptyset	Пример 12	$\sqrt{2x^2-5x+2} \leq 0 \Leftrightarrow$ $2x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ x=0,5 \end{cases}$ Ответ: $\{0,5; 2\}.$	Пример 13	$\sqrt{x-7} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-7 \geq 0, \\ x-7 \leq 1 \end{cases}$ $\Leftrightarrow 7 \leq x \leq 8.$ ответ: $[7; 8].$

п.4. Неравенства вида ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < c$ и ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq c$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < c \Leftrightarrow f(x) < c^{2n+1}$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq c \Leftrightarrow f(x) \leq c^{2n+1}$$

Пример Решить неравенство $\sqrt[5]{x+3} < -2$

Решение

$$\sqrt[5]{x+3} < -2 \Leftrightarrow x+3 < (-2)^5 \Leftrightarrow x+3 < -32 \Leftrightarrow x < -35.$$

Ответ: $(-\infty; -35)$.

5. Неравенства вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \quad \text{и} \quad \sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$$

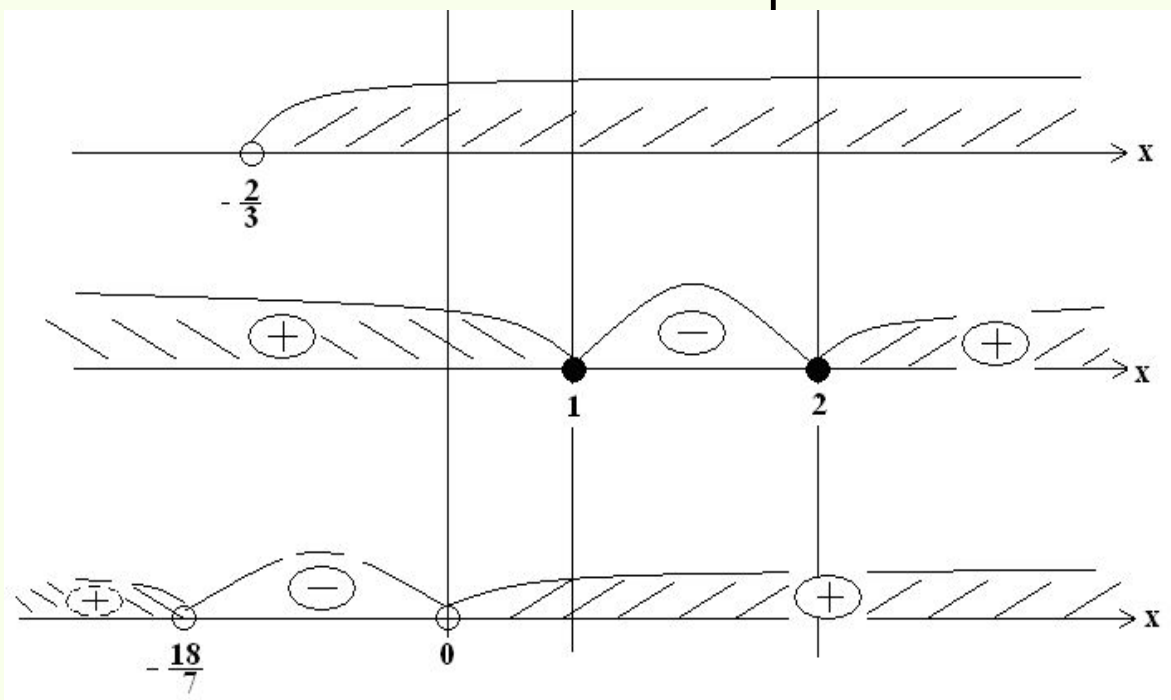
$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x)$	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$
$\sqrt[2n]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^{2n}(x) \end{cases}$	$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) < g^{2n}(x) \end{cases}$

Решить неравенство $\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < 3x + 2$

Решение

$$\sqrt{2x^2 - 6x + 4} < 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 2x^2 - 6x + 4 \geq 0, \\ 2x^2 - 6x + 4 < (3x + 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3}, \\ 2x^2 - 6x + 4 \geq 0, \\ 7x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$

Ответ: $(0; 1] \cup [2; +\infty)$.



6. Неравенства вида

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq g(x)$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g^{2n+1}(x)$$

$${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g^{2n+1}(x)$$

Решить неравенство $\sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} < 2x - 1$

Решение

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 - 3x + 3} < 2x - 1 &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 < (2x - 1)^3 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 < 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 7x^3 - 12x^2 + 9x - 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 1)(7x^2 - 5x + 4) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \end{aligned}$$

Ответ: $(1; +\infty)$

7. Неравенство вида $\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$

$$\sqrt[2n]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^{2n}(x), \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) > g^{2n}(x), \\ g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - x$

Решение

$$\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2 - x \geq 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq (2 - x)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x < 0, \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 2, \\ x \leq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 2, \\ \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 4 \end{cases} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

8. Неравенства вида $\sqrt[2n+1]{f(x)} \geq g(x)$ и $\sqrt[2n+1]{f(x)} > g(x)$

Решить неравенство $\sqrt[5]{x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34} \geq x - 2$

Решение

$$\sqrt[5]{x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34} \geq x - 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 15x^2 + 17x - 34 \geq (x - 2)^5 \Leftrightarrow$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$.

9. Неравенства вида

$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)} \quad \text{и} \quad \sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}$$

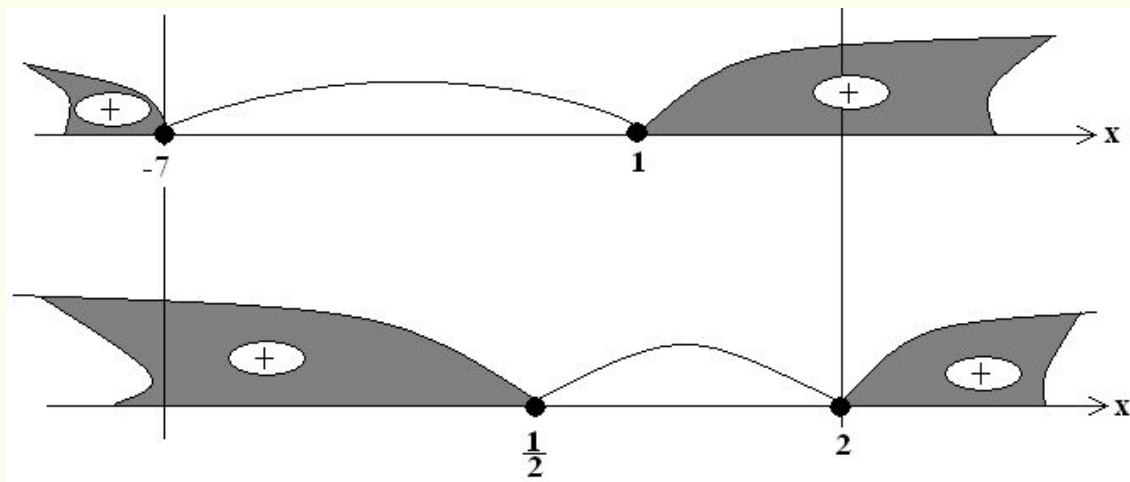
$$\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g(x) \end{cases} \quad \text{и} \quad \sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Решить неравенство $\sqrt{3x^2 + x - 5} \geq \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$

Решение

$$\sqrt{3x^2 + x - 5} \geq \sqrt{2x^2 - 5x + 2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x - 5 \geq 2x^2 - 5x + 2, \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x - 7 \geq 0, \\ 2x^2 - 5x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -7] \cup [2; +\infty)$.



ЗАЧЕТ

1	${}^{2n}\sqrt{f(x)} > c, \quad c < 0$	2	${}^{2n}\sqrt{f(x)} > c, \quad c = 0$
3	${}^{2n}\sqrt{f(x)} > c, \quad c > 0$	4	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \geq c, \quad c < 0$
5	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \geq c, \quad c = 0$	6	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \geq c, \quad c > 0$
7	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} > c$	8	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \geq c$
9	${}^{2n}\sqrt{f(x)} < c, \Leftrightarrow c < 0$	10	${}^{2n}\sqrt{f(x)} < c, \quad c < 0$
11	${}^{2n}\sqrt{f(x)} < c, \quad c > 0$	12	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \leq c, \quad c < 0$
13	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \leq c, \quad c = 0$	14	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \leq c, \quad c > 0$
15	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} \leq g(x)$	16	${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} < g(x)$
17	${}^{2n}\sqrt{f(x)} < g(x)$	18	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \leq g(x)$
19	${}^{2n}\sqrt{f(x)} > g(x)$	20	${}^{2n}\sqrt{f(x)} \geq g(x)$

Решить неравенство $\sqrt[3]{7x-2} < 2$

Решение

$$\sqrt[3]{7x-2} < 2 \Leftrightarrow 7x-2 < 2^3 \Leftrightarrow 7x-2 < 8 \Leftrightarrow 7x < 10 \Leftrightarrow x < \frac{10}{7}$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{10}{7}\right)$.

Решить неравенство $\sqrt{7x+12} > 2$

Решение

$$\sqrt{7x+12} > 2 \Leftrightarrow 7x+12 > 2^2 \Leftrightarrow 7x+12 > 4 \Leftrightarrow 7x > -8 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{7}$$

Ответ: $\left(-\frac{8}{7}; +\infty\right)$.

$$c > 0, \quad \sqrt[2n]{f(x)} > c \Leftrightarrow f(x) > c^{2n}$$

Решить неравенство $\sqrt[3]{x+2} \geq -5$

Решение

$$\sqrt[3]{x+2} \geq -5 \Leftrightarrow x+2 \geq (-5)^3 \Leftrightarrow x+2 \geq -125 \Leftrightarrow x \geq -127$$

Ответ: $[-127; +\infty)$.

Решить неравенство $\sqrt{x-5} < 4$

Решение

$$\sqrt{x-5} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ x-5 < 4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ x < 21 \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x < 21$$

Ответ: $[5; 21)$.

$$c > 0, \quad \sqrt[2n]{f(x)} < c \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) < c^{2n} \end{cases}$$

10. Введение новой неизвестной

Решить неравенство $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$

Решение

Пусть $t = \sqrt{15-x}$, $t > 0$, тогда $x = 15-t^2$ и получим систему

$$\begin{cases} t > 0, \\ \frac{3-(15-t^2)}{t} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ \frac{t^2-12}{t} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ \frac{t^2-t-12}{t} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t^2-t-12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < 4$$

Вернемся к переобозначению

$$0 < \sqrt{15-x} < 4 \Leftrightarrow 0 < 15-x < 16 \Leftrightarrow -15 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 15$$

Ответ: $(-1; 15)$.

Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{2}{4-\sqrt{x}}$

Решение

Пусть $t = \sqrt{x}$, $t > 0$, тогда получим систему

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{1}{t+2} \geq \frac{2}{4-t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{-3t}{(t+2)(4-t)} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t > 0, \\ \frac{t}{(t+2)(4-t)} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t > 0, \\ \frac{1}{4-t} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t > 0, \\ t > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, \\ t > 4 \end{cases}$$

Вернемся к переобозначению: $\begin{cases} \sqrt{x} = 0, \\ \sqrt{x} > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x > 16 \end{cases}$

Ответ: $\{0\} \cup (16; +\infty)$.

Решить неравенство $\frac{x + \sqrt{x} - 2}{x - \sqrt{x} - 2} \leq 0$

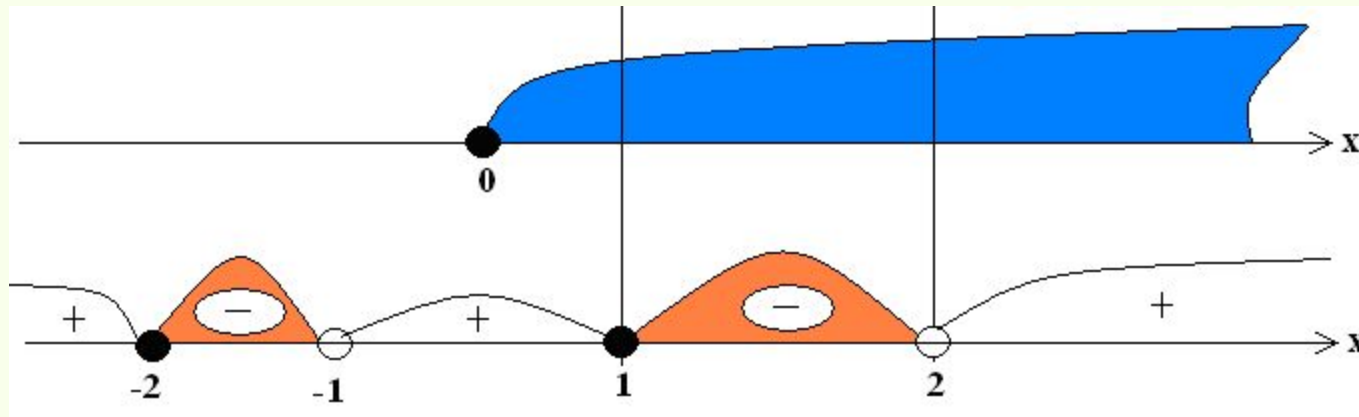
Решение

Пусть $t = \sqrt{x}$, $t \geq 0$, тогда $x = t^2$ получим систему

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \frac{t^2 + t - 2}{t^2 - t - 2} \leq 0 \end{cases}$$

Вернемся к переобозначению: $1 \leq \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow 1 \leq x < 4$.

Ответ: $[1; 4)$.

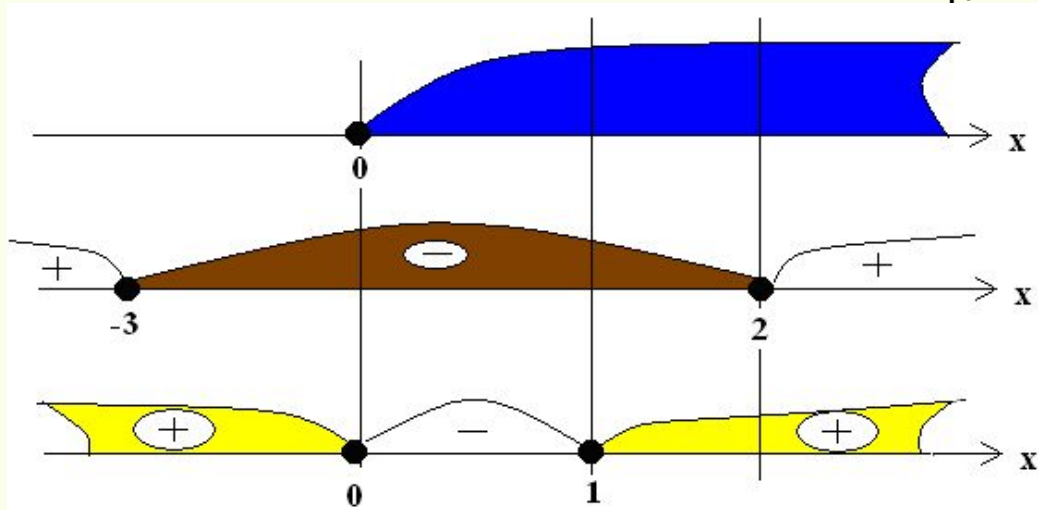


Решить неравенство $|x - 7| \leq 3 - \sqrt{x - 4}$

Решение

Пусть $t = \sqrt{x - 4}$, $t \geq 0$, тогда $x = t^2 + 4$ получим систему

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ |t^2 - 3| \leq 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ |t^2 - 3| \leq 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t - 3 \leq t^2 - 3 \leq 3 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 + t - 6 \leq 0, \\ t^2 - t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq t \leq 2, \\ t = 0 \end{cases}$$



Вернемся к переобозначению: $\begin{cases} 1 \leq \sqrt{x - 4} \leq 2, \\ \sqrt{x - 4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x - 4 \leq 4, \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq 8, \\ x = 4 \end{cases}$

Ответ: $\{4\} \cup [5; 8]$.

Пример. Решить неравенства $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$

Решение

Пусть $t = \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow x = t^2 + 1$, тогда неравенство примет вид

$$\begin{aligned} \begin{cases} t \geq 0, \\ \sqrt[3]{1-t^2} + t > 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ \sqrt[3]{1-t^2} > 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ 1-t^2 > (1-t)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ t^3 - 4t^2 + 3t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ t^2 - 4t + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 0, \\ \begin{cases} t < 1, \\ t > 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < t < 1, \\ t > 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Вернемся к переобозначению

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 < \sqrt{x-1} < 1, \\ \sqrt{x-1} > 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x-1 < 1, \\ x-1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 2, \\ x > 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$.

Решение

Пусть $a = \sqrt{x-1}$, $a \geq 0$, $b = \sqrt{x+6}$, $b \geq 0$, тогда неравенство примет вид

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ a + b + 2ab < 56 - a^2 - b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ (a+b)^2 + (a+b) - 56 < 0 \end{cases}$$

Пусть $a + b = t$, $t \geq 0$, и решим третье неравенство системы

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ t^2 + t - 56 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0, \\ -8 < t < 7 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq t < 7$$

Вернемся к переобозначению

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ b \geq 0, \\ 0 \leq a + b < 7 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 0, \\ \sqrt{x+6} \geq 0, \\ 0 \leq \sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x \geq -6, \\ x - 1 + 2 \cdot \sqrt{(x-1)(x+6)} + x + 6 < 49 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ \sqrt{(x-1)(x+6)} < 22 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ 22 - x > 0, \\ (x-1)(x+6) < (22-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1, \\ x < 22, \\ x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 10$$

Ответ: $[1; 10)$.

П.11. Обобщенный метод интервалов при решении неравенства

ПЛАН

Ввести функцию и записать неравенство

1. Найти область определения полученной функции.
2. Найти «нули» функции с учетом области определения.
3. Отметить на числовой прямой данные 1 и 2.
4. Определить истинность или ложность на каждом из промежутков п3 или найти знаки на каждом промежутке п. 3

Решение

Пусть $f(x) = \sqrt{7x+9} - \sqrt{2x-1} - 5$, $f(x) < 0$

1). Функция $f(x)$ определена, если $\begin{cases} 7x+9 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases}$ и тем самым $D(f) = [0,5; +\infty)$.

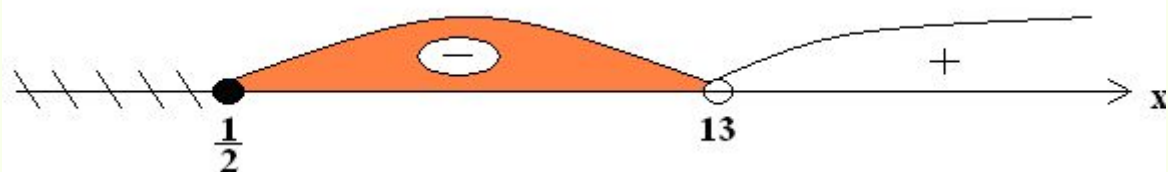
2) Найдем «нули» функции $f(x)$.

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(f) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,5; +\infty), \\ \sqrt{7x+9} - \sqrt{2x-1} - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,5; +\infty), \\ \sqrt{7x+9} = \sqrt{2x-1} + 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,5, \\ 7x+9 = 2x-1 + 10\sqrt{2x-1} + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,5, \\ x-3 = 2 \cdot \sqrt{2x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 14x + 13 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x=1, \Leftrightarrow x=13. \\ x=13 \end{cases}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 13 \right)$.



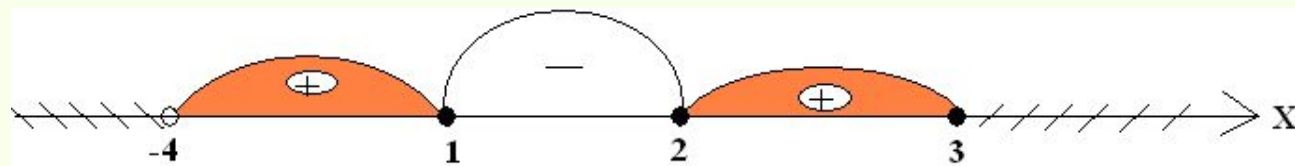
Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{\frac{3-x}{x+4}}$, $f(x) \geq 0$.

$$1) D(f): \frac{3-x}{x+4} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-4; 3]$$

2) Найдем «нули» функции на области определения:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in (-4; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{\frac{3-x}{x+4}} = 0, \\ x \in (-4; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3, \\ x \in (-4; 3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 2, \\ x = 3, \end{cases}$$



Ответ: $(-4; 1] \cup [2; 3]$.

П.12. Неравенства вида $g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \leq 0$ и $g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \geq 0$

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \leq 0$$

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \\ f(x) > 0, \\ g(x) \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} < 0$$

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

Решение

$$\frac{2x-1}{x+6} \cdot \sqrt{x^2-2x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ x+6 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-2x-3 > 0, \\ \frac{2x-1}{x+6} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1, \\ x = 3, \\ x \neq -6 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+1)(x-3) > 0, \\ \frac{2x-1}{x+6} \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 3, \\ -6 < x < -1 \end{cases}$$

Ответ : $(-6; -1] \cup \{3\}$.

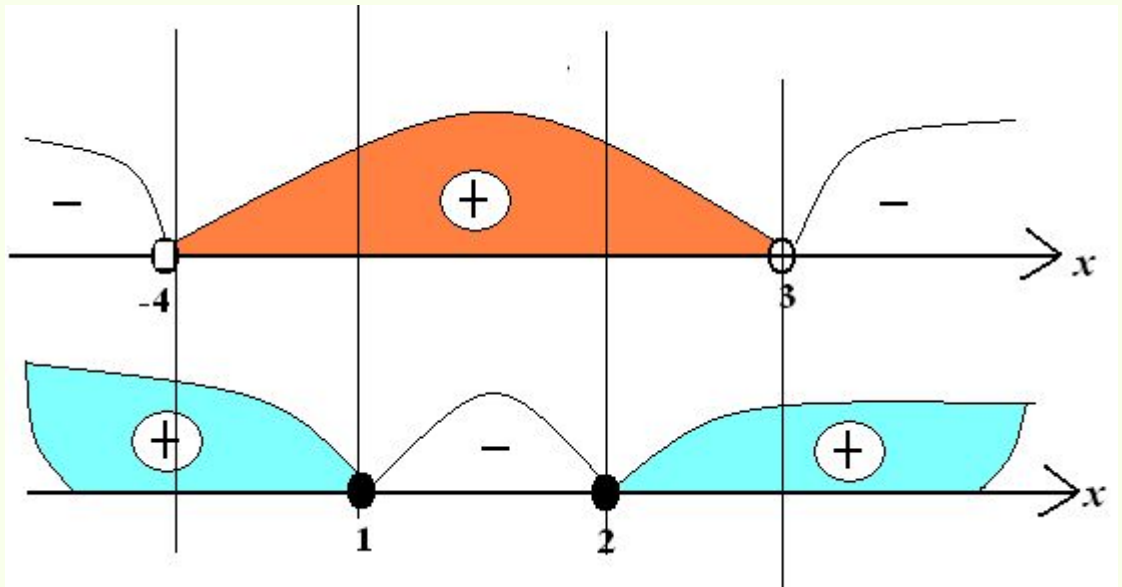
$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \geq 0$$

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ x \in D(g) \\ f(x) > 0, \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Решить неравенство

$$(x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{\frac{3-x}{x+4}} \geq 0.$$

$$(x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{\frac{3-x}{x+4}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-x}{x+4} = 0, \\ x \in \boxed{?} \\ \frac{3-x}{x+4} > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ \frac{3-x}{x+4} > 0, \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $(-4; 1] \cup [2; 3]$.

$$g(x) \cdot \sqrt[2n]{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Решить неравенство

$$(x^2 + 4x - 5) \cdot \sqrt{x + 5} > 0$$

решение

$$(x^2 + 4x - 5) \cdot \sqrt{x + 5} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 5 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -5, \\ \left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow x > 1. \end{cases}$$

Ответ : $(1; +\infty)$.

3.3.D02 а) Решите неравенство $(\sqrt{x+1} - x + 1)(\sqrt{x+6} - x) \leq 0$.

Решение. Воспользуемся методом интервалов. Пусть $F(x) = (\sqrt{x+1} - x + 1)(\sqrt{x+6} - x)$. Решим неравенство $F(x) \leq 0$.

Найдем область определения функции F : $D(F) = [-1; +\infty)$.

Найдем нули функции. Решим уравнение: $(\sqrt{x+1} - x + 1)(\sqrt{x+6} - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - x + 1 = 0, \\ \sqrt{x+6} - x = 0, \\ x \geq -1. \end{cases}$

Решим первое уравнение совокупности:

$$\sqrt{x+1} - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = (x - 1)^2, \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = x^2 - 2x + 1, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ x = 3, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Решим второе уравнение совокупности: $\sqrt{x+6} - x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+6} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x + 6 = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Единственный нуль функции: $x = 3$. Если $x \in [-1; 3) \cup (3; \infty)$, то $F(x) > 0$. Решение неравенства: $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

3.3.C08 а) Решите неравенство

$$(x^2 - 8x + 12)\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \leq 0.$$

Решение. $\sqrt{-2x^2 + 11x - 15} \geq 0$ при всех допустимых значениях x . Следовательно, данное неравенство равносильно

совокупности
$$\begin{cases} -2x^2 + 11x - 15 = 0, \\ -2x^2 + 11x - 15 \geq 0, \\ x^2 - 8x + 12 \leq 0. \end{cases}$$

Решим систему
$$\begin{cases} -2x^2 + 11x - 15 \geq 0, \\ x^2 - 8x + 12 \leq 0. \end{cases}$$

$$-2x^2 + 11x - 15 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 11x + 15 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \leq x \leq 5.$$

$$x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 6.$$

Решение системы: $x \in [2; 5]$.

Корни уравнения $-2x^2 + 11x - 15 = 0$: $x = \frac{3}{2}$; $x = 5$.

Объединяя полученные множества, найдем решение совокупности: $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [2; 5]$.

Ответ: $x \in \left\{\frac{3}{2}\right\} \cup [2; 5]$.

б) Решите неравенство

$$(x^2 - 7x + 6)\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \leq 0.$$

Решение. $\sqrt{-3x^2 - 4x + 4} \geq 0$ при всех допустимых значениях x . Следовательно, данное неравенство равносильно со-

вокупности
$$\begin{cases} -3x^2 - 4x + 4 = 0, \\ -3x^2 - 4x + 4 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

Решим систему
$$\begin{cases} -3x^2 - 4x + 4 \geq 0, \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0. \end{cases}$$

$$-3x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 2.$$

$$x^2 - 7x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 6.$$

Решение системы: $x \in [1; 2]$.

Корни уравнения $-3x^2 - 4x + 4 = 0$: $x = -\frac{2}{3}$; $x = 2$.

Объединяя полученные множества, найдем решение совокупности: $x \in \{-\frac{2}{3}\} \cup [1; 2]$.

Ответ: $x \in \{-\frac{2}{3}\} \cup [1; 2]$.

3.3.C09 а) Решите неравенство $\frac{x+3}{x+4} \sqrt{28-9x-4x^2} \geq 0$.

Решение. $\sqrt{28-9x-4x^2} \geq 0$ при всех допустимых значениях x . Следовательно, данное неравенство равносильно со-

вокупности
$$\begin{cases} 28-9x-4x^2 \geq 0, \\ \frac{x+3}{x+4} \geq 0, \\ 28-9x-4x^2 = 0, \\ x+4 \neq 0. \end{cases}$$

Решим систему
$$\begin{cases} 28-9x-4x^2 \geq 0, \\ \frac{x+3}{x+4} \geq 0. \end{cases}$$

$$28-9x-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 4x^2+9x-28 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq x \leq \frac{7}{4}.$$

Решим неравенство $\frac{x+3}{x+4} \geq 0$. Получим $x \in (-\infty; -4) \cup [-3; +\infty)$.

Решение системы: $x \in [-3; \frac{7}{4}]$.

Решим систему
$$\begin{cases} 28-9x-4x^2 = 0, \\ x+4 \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 28-9x-4x^2 = 0, \\ x+4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -4, \\ x = \frac{7}{4}, \end{cases} \\ x \neq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}.$$

Объединяя полученные множества, находим решение совокупности: $x \in [-3; \frac{7}{4}]$.

Ответ: $x \in [-3; \frac{7}{4}]$.

Спасибо за внимание!