Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

5. Интеграл в множестве C$^+[a,b]$

Пусть функция $x \in C^+$. Тогда 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a,b]$ и 2) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a,b]$ функций, что $h_n(t) \nearrow x(t)$ при $n \to \infty$ и $(\exists c \geq 0)(\forall n \in \mathbb{N})\,[\,Ih_n \leq c\,]$.

По свойству интеграла от ступенчатой функции (см. лемму 6), числовая последовательность $\{Ih_n\}$ монотонно возрастает. При этом она ограничена сверху.

Тогда существует конечный $\lim_{n\to\infty} Ih_n$.

Лемма 10. *Пусть функции* $x, y \in C^+$ *и* $x(t) \leq y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$. *Пусть* $\{h_n(t)\}$ *и* $\{k_n(t)\}$ *ступенчатые функции такие, что:* $h_n(t) \nearrow x(t)$, $k_n(t) \nearrow y(t)$, $Ih_n \leq c_1$, $Ik_n \leq c_2$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} Ih_n \leq \lim_{n\to\infty} Ik_n$.

(Без доказательства.)

Определим теперь интеграл для $x \in C^+$ следующим образом:

$$(C^+)Ix = \lim_{n\to\infty} Ih_n. \tag{4}$$

Из леммы 10 следует, что это определение $(C^+)Ix$ не зависит от выбора последовательности ступенчатых функций $\{h_n\}$ и, следовательно, корректно.

Это замечание позволяет переформулировать лемму 10.

Следствие. *Пусть функции* $x, y \in C^+$ *и* $x(t) \le y(t)$ *п.в. на* $[a, b]$. *Тогда* $(C^+)Ix \le (C^+)Iy$.

Свойство. Если на $[a, b]$ выполняется $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x \in C^+$, то $(C^+)Ix = (C^+)Iy$.
(Доказать самостоятельно.)

Непосредственно из определения интеграла (4) следует

Лемма 11 (свойства интеграла). *Пусть функции* $x, y \in C^+$. *Тогда:*
1) $(\forall \alpha \ge 0)[\,(C^+)I(\alpha x) = \alpha (C^+)Ix\,]$;
2) $(C^+)I(x + y) = (C^+)Ix + (C^+)Iy$.
(Доказать самостоятельно.)

Теорема 2. *Пусть задана последовательность функций* $\{x_n\} \subset C^+$ *такая, что* $x_n(t) \nearrow x(t)$ *и* $(\exists c)(\forall n)\,[(C^+)Ix_n \le c]$.

Тогда функция $x \in C^+$ *и* $(C^+)Ix = \lim_{n\to\infty}(C^+)Ix_n$.

(Без доказательства.)

Следствие. *Пусть дан функциональный ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$, *где все функции* $y_k \in C^+$ *и* $y_k(t) \ge 0$. *Пусть также* $(\exists c)(\forall n)\,[\sum_{k=1}^{n}(C^+)Iy_k \le c]$.

Тогда функция $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \in C^+$ *и* $(C^+)Ix = \sum_{k=1}^{\infty}(C^+)Iy_k$.

Доказательство. Следует определить функции $x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)$ и применить доказанную теорему 2.

6. Интеграл Римана и множество $C^+[a,b]$

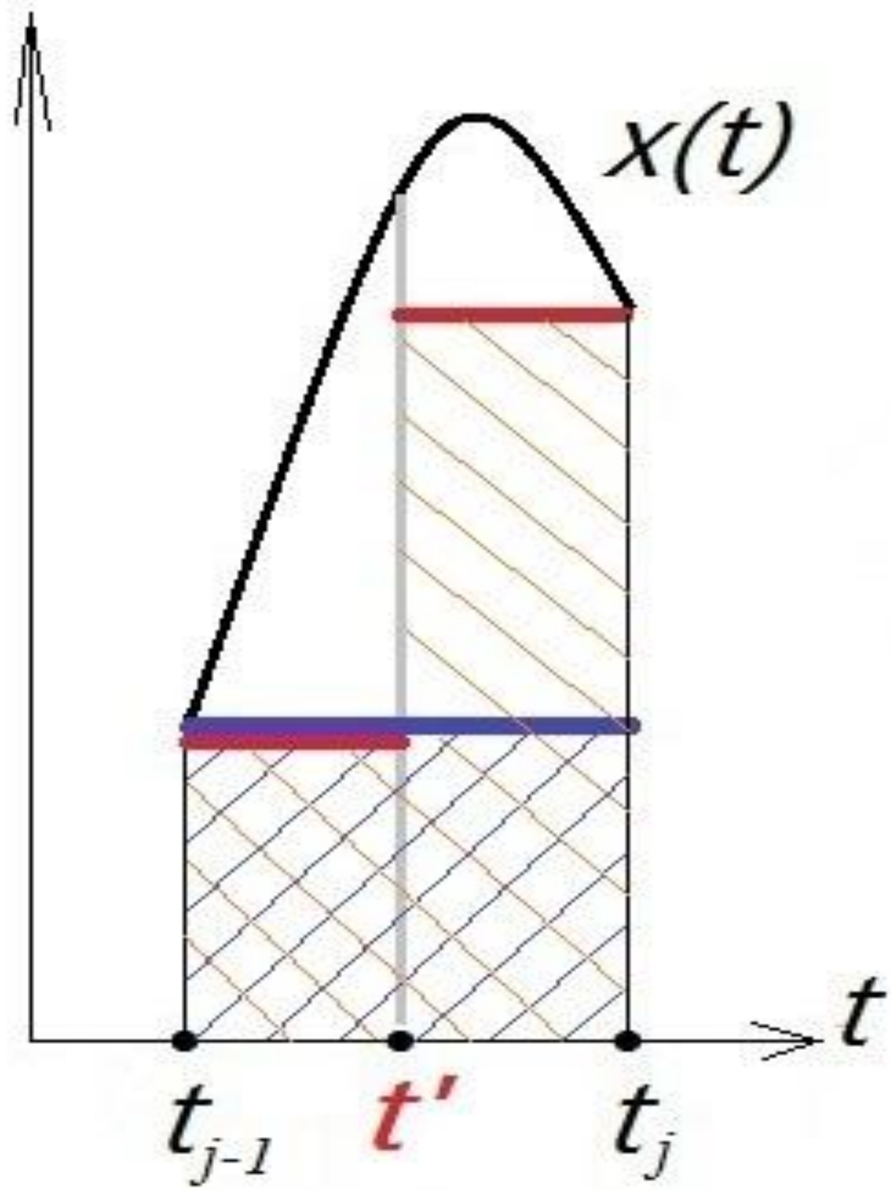
Напомним известную из курса математического анализа схему построения интеграла Римана от ограниченной на $[a, b]$ функции $x(t)$. Обозначим через P разбиение $\{t_j \mid j = \overline{0, l}\,; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = b\}$ отрезка $[a, b]$ на частичные отрезки $\triangle_j = [t_{j-1}, t_j]$, где $j = \overline{1, l}\,$. Обозначим

$$m_j = \inf_{t \in \triangle_j} x(t), \qquad M_j = \sup_{t \in \triangle_j} x(t).$$

Составим две суммы, зависящие от разбиения P:

$$s_P = \sum_j m_j |\triangle_j|, \qquad S_P = \sum_j M_j |\triangle_j|\,,$$

которые называются соответственно *нижней и верхней интегральными суммами Дарбу.*



x(t)
t
t_{j-1}
t'
t_j

Пусть даны два разбиения P_1 и P_2. Рассмотрим разбиение $P = P_1 \cup P_2$. Тогда, очевидно,

$$s_{P_1} \le s_P \le S_P \le S_{P_2}.$$

Таким образом, при добавлении новых точек деления нижняя сумма Дарбу может лишь увеличиться, а верхняя сумма лишь уменьшиться. Кроме того, для произвольных разбиений нижняя сумма Дарбу не превосходит любой верхней суммы. Следовательно, определены два числа:

$$s = \sup_P s_P\,, \qquad S = \inf_P S_P\,,$$

где точные верхняя и нижняя границы берутся по всем разбиениям P. Очевидно, что $s \le S$.

Если $s = S$, то говорят, что *функция* $x(t)$ *интегрируема на* $[a, b]$ *по Риману*, причем значение интеграла Римана

$$(R) \int_a^b x(t)\, dt = (R)Ix = s = S.$$

Если же $s < S$, то говорят, что функция $x(t)$ по Риману на $[a, b]$ не интегрируема.

Ограниченной на $[a, b]$ функции $x(t)$ и разбиению P сопоставим две ступенчатые функции $h_P(t)$ и $H_P(t)$, первая из которых в промежутке $\triangle_j$ принимает значения m_j, а вторая – M_j. Тогда

$$s_p = Ih_P, \quad S_p = IH_P.$$

Возьмем последовательность разбиений $\{P_n\}$ отрезка $[a, b]$, такую, что длина максимального промежутка в разбиении P_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Тогда $s_{P_n} = s_n \to s$ и $S_{P_n} = S_n \to S$ (доказывается в курсе мат. анализа).

Предположим далее, что на $[a, b]$ задана последовательность разбиений $\{P_n\}$ такая, что $P_n \subset P_{n+1}$, то есть разбиение P_{n+1} получается из разбиения P_n путем добавления новых точек деления. Кроме того, считаем, что длина максимального промежутка в разбиении P_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Такую последовательность разбиений будем называть *стандартной*. Последовательности таких разбиений сопоставим, как было описано выше, две последовательности ступенчатых функций: $\{h_n(t)\}$ и $\{H_n(t)\}$, где $h_n(t) = h_{P_n}(t)$ и $H_n(t) = H_{P_n}(t)$. Заметим, что п.в. на $[a, b]$

$$h_1(t) \leq h_2(t) \leq ... \leq h_n(t) \leq ... \leq x(t),$$

$$x(t) \leq ... \leq H_n(t) \leq ... \leq H_2(t) \leq H_1(t).$$

Обозначим через $\underline{x}(t)$ и $\overline{x}(t)$ предельные функции этих последовательностей ступенчатых функций, то есть $h_n(t) \nearrow \underline{x}(t)$ и $H_n(t) \searrow \overline{x}(t)$. Очевидно, что п.в. на $[a, b]$

$$\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t).$$

Теорема 3. *Ограниченная на $[a, b]$ функция $x(t)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\underline{x}(t) = x(t) = \overline{x}(t)$ п.в. на $[a, b]$.*

Напоминание (из пар. 3)

Лемма 7. *Пусть* $\{k_n(t)\}$ — *последовательность неотрицательных ступенчатых функций и* $k_n(t) \searrow 0$. *Тогда* $Ik_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Лемма 8. *Пусть* $\{k_n(t)\}$ — *последовательность неотрицательных ступенчатых функций и эта последовательность п.в. на* $[a, b]$ *монотонно убывает. Пусть также* $Ik_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $k_n(t) \searrow 0$.

Доказательство теоремы 3.

Необходимость. Пусть функция $x(t)$ интегрируема по Риману. Последовательность ступенчатых функций $\{H_n(t)-h_n(t)\}$ монотонно убывает п.в. на $[a,b]$, то есть при всех n

$H_n(t)-h_n(t) \geq H_{n+1}(t)-h_{n+1}(t)$ и $H_n(t)-h_n(t) \geq 0$.

Кроме того,

$$I(H_n - h_n) = IH_n - Ih_n \to S - s = 0.$$

Воспользовавшись леммой 8, получим, что $H_n(t) - h_n(t) \searrow 0$.

С другой стороны, $H_n(t) - h_n(t) \searrow \overline{x}(t) - \underline{x}(t)$.

Следовательно,

$$\underline{x}(t) = \overline{x}(t) \Rightarrow \underline{x}(t) = x(t) = \overline{x}(t)$$

(с учетом неравенства $\underline{x}(t) \leq x(t) \leq \overline{x}(t)$).

Достаточность. Теперь предположим, что $\underline{x}(t) = \overline{x}(t)$. Следовательно, $H_n(t) - h_n(t) \searrow \overline{x}(t) - \underline{x}(t) = 0$.

Воспользовавшись леммой 7, получим

$$I(H_n - h_n) \searrow 0.$$

Но, с другой стороны,

$$I(H_n - h_n) = IH_n - Ih_n \to S - s.$$

Таким образом, $s = S$ и функция $x(t)$ интегрируема по Риману. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть функция $x(t)$ ограничена и интегрируема на $[a,b]$ по Риману. Тогда $x \in C^+$ и*

$$(C^+)Ix = (R)Ix.$$

Доказательство. По произвольной стандартной последовательности разбиений отрезка $[a,b]$ определим, как описано выше, последовательность ступенчатых функций $\{h_n(t)\}$. Заметим, что $h_n(t) \nearrow \underline{x}(t) = x(t)$ и, кроме того, $Ih_n = s_n \leq s = (R)Ix < \infty$. Следовательно, $x \in C^+$, а также выполняется

$$(C^+)Ix = \lim_{n\to\infty} Ih_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s = (R)Ix.$$

Следствие доказано.

Пример. Рассмотрим функцию на отрезке $[0,1]$:

$$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,1] \setminus A, \\ \sin t, & t \in A \end{cases} \overset{\substack{\text{почти} \\ \text{всюду}}}{=} \cos t = y(t)$$

(A — ММН).

Функция $y(t) = \cos t$ непрерывна на $[0,1]$, то есть интегрируема по Риману.

Следовательно, $y \in C^{+}[0,1] \Rightarrow x \in C^{+}[0,1]$ и

$$(C^{+})Ix = (C^{+})Iy = (R)Iy = \int_0^1 \cos t\, dt.$$

7. Интеграл Римана и критерий Лебега

Теорема (Лебега) 5. *Ограниченная на отрезке* $[a,b]$ *функция* $x(t)$ *интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва есть ММН.*

(Без доказательства).