Электричество и магнетизм

Лекция 06

Проводники. Конденсаторы.
Энергия электрического поля

06 октября 2021 года
Лектор: доцент НИЯУ МИФИ,
Ольчак Андрей Станиславович

Проводники и диэлектрики

Диэлектрик – вещество, где нет свободных электрических зарядов, способных перемещаться под действием приложенного электрического поля (= проводить электрический ток).

Проводник – вещество, где способные перемещаться заряды есть и электрический ток (упорядоченное направленное движение электрических зарядов) существовать может .

Характеристики диэлектриков

Вектор поляризованности – дипольный момент единицы объема поляризованного вещества

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{N}\vec{\mathbf{p}}_i$$

В изотропном диэлектрике $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \xi \boldsymbol{E}$

$\xi = \varepsilon - 1$ – диэлектрическая восприимчивость

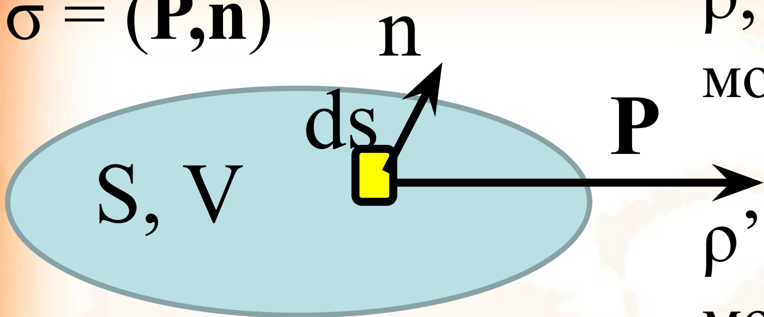
$\varepsilon = 1 + \xi$ – диэлектрическая проницаемость

Вектор электрической индукции в однородном диэлектрике

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \varepsilon \boldsymbol{E}$$

Теоремы Гаусса для векторов в диэлектриках

$\sigma = (\mathbf{P},\mathbf{n})$



ρ, q– сторонний заряд (не принадлежит молекулам диэлектрика)

ρ’, q’ = связанный заряд (принадлежит молекулам диэлектрика)

$\mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho'$ $\qquad \oint(\mathbf{P},d\mathbf{S}) = q'$

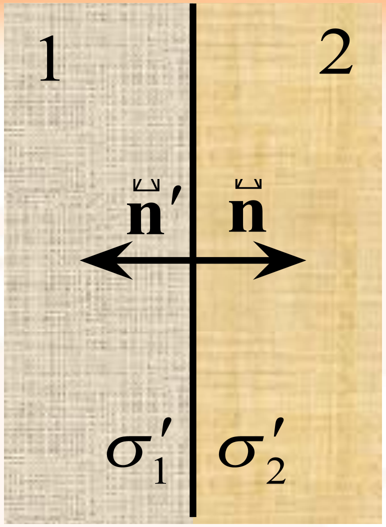
$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho$ $\qquad \boxed{\oint_S \vec{\mathbf{D}}\,\overrightarrow{d\mathbf{S}} = q}$

$\varepsilon_0\,\mathrm{div}\mathbf{E} = \rho + \rho'$ $\qquad \oint(\mathbf{E},d\mathbf{S}) = q + q'$

Условия на границе двух диэлектриков

Связанные заряды на границе двух диэлектриков

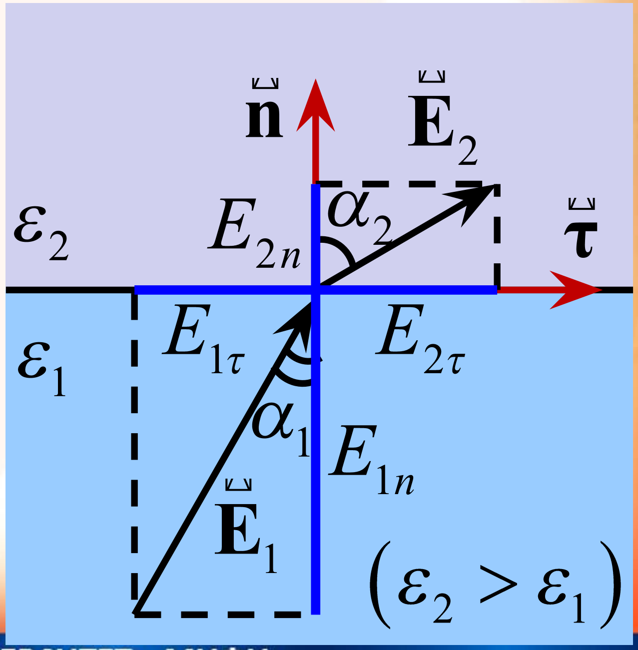
$$\sigma = (\mathbf{P},\mathbf{n}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma' = P_{1n} - P_{2n}}$$



$$D_{1n} = D_{2n} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$$

$$E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{tg}\alpha_2}{\operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$



Кристаллические (анизотропные) диэлектрики

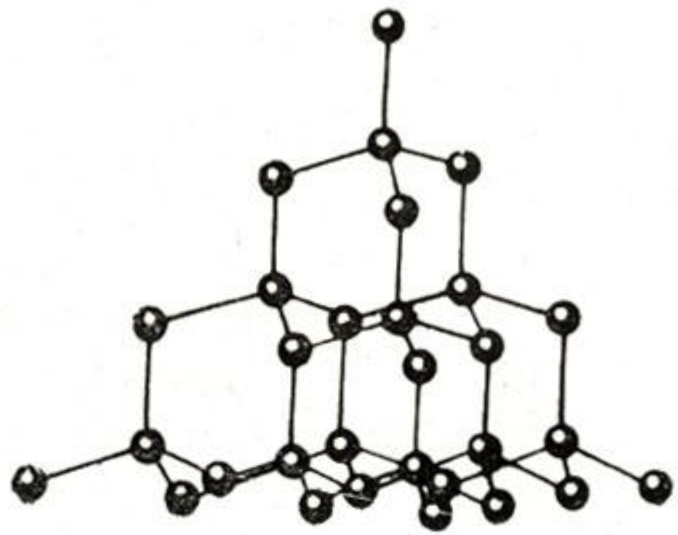
$$P_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \xi_{ij} E_j, \quad i, j = x, y, z.$$

$$D_i = \varepsilon_0 \sum_{j=1}^{3} \varepsilon_{ij} E_j$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \xi_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Кристаллическая решетка алмаза



Кристаллические диэлектрики

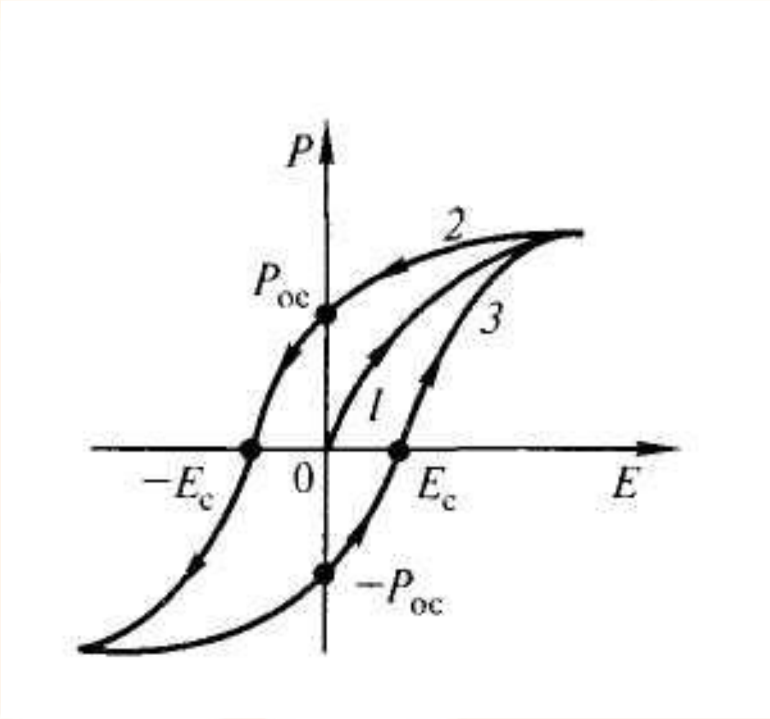
Пьезоэлектрики – кристаллические диэлектрики, в которых при сжатии и растяжении в определённых направлениях возникает электрическая поляризация в отсутствие электрического поля (прямой пьезоэффект)

Пироэлектрики – кристаллические диэлектрики, обладающие спонтанной поляризацией (в отсутствие электрического поля), которая изменяется при изменении температуры.

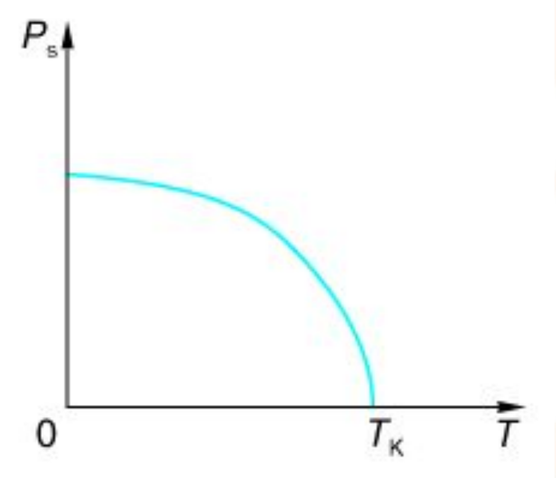
Сегнетоэлектрики – кристаллические диэлектрики, обладающие в определённом интервале температур спонтанной поляризацией, которая существенно изменяется при внешних воздействиях.

Кристаллические диэлектрики

$$\varepsilon \sim 10^3 - 10^4$$



Зависимость поляризованности от напряжённости электрического поля в сегнетоэлектрике.



Зависимость спонтанной поляризации от температуры.
T_k – температура Кюри

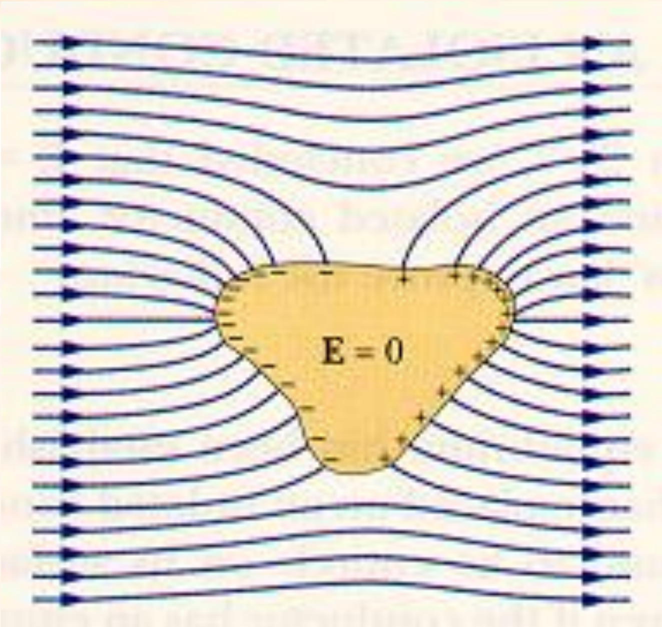
Проводники в электрическом поле

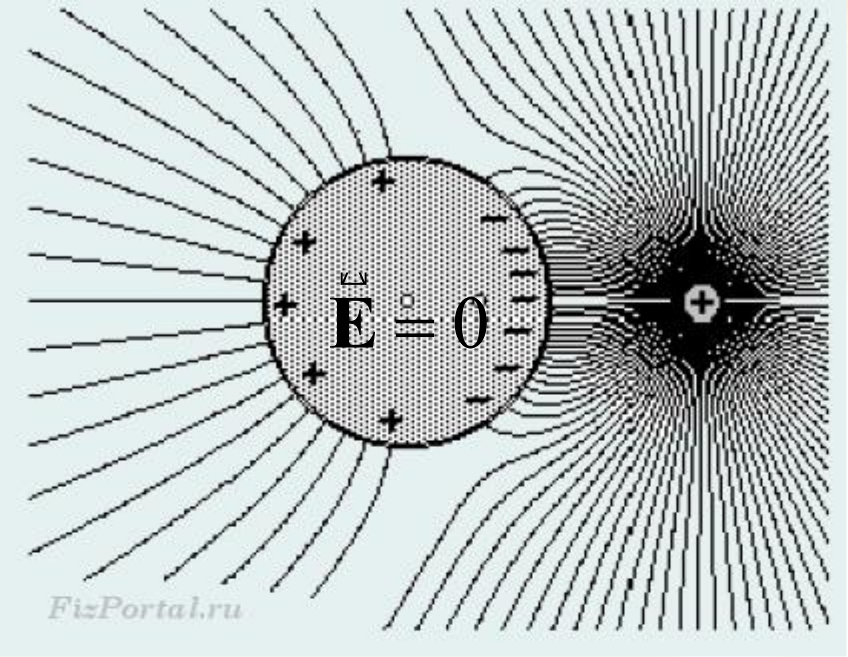
Проводник в электрическом поле

Проводник – это вещество хорошо проводящее электрический ток.

В проводнике есть свободные электрические заряды.

Проводник в электрическом поле





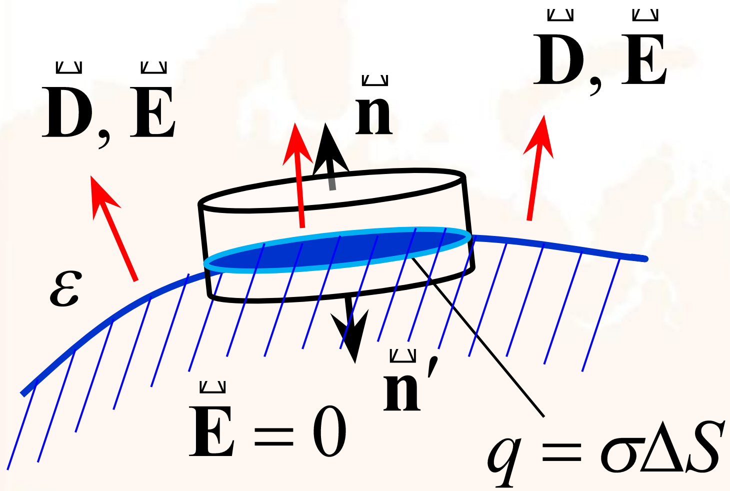
$$\vec{\mathbf{E}} = 0 \qquad \vec{\mathbf{E}} = -\nabla\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \mathrm{const}$$

$$\left(\nabla, \vec{\mathbf{E}}\right) = \rho/\varepsilon_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = 0$$

Свободные заряды в проводнике перераспределяются так, что внутри проводника напряженность поля равна 0, а не поверхности – перпендикулярна таковой.

Проводник в электрическом поле

Граничные условия



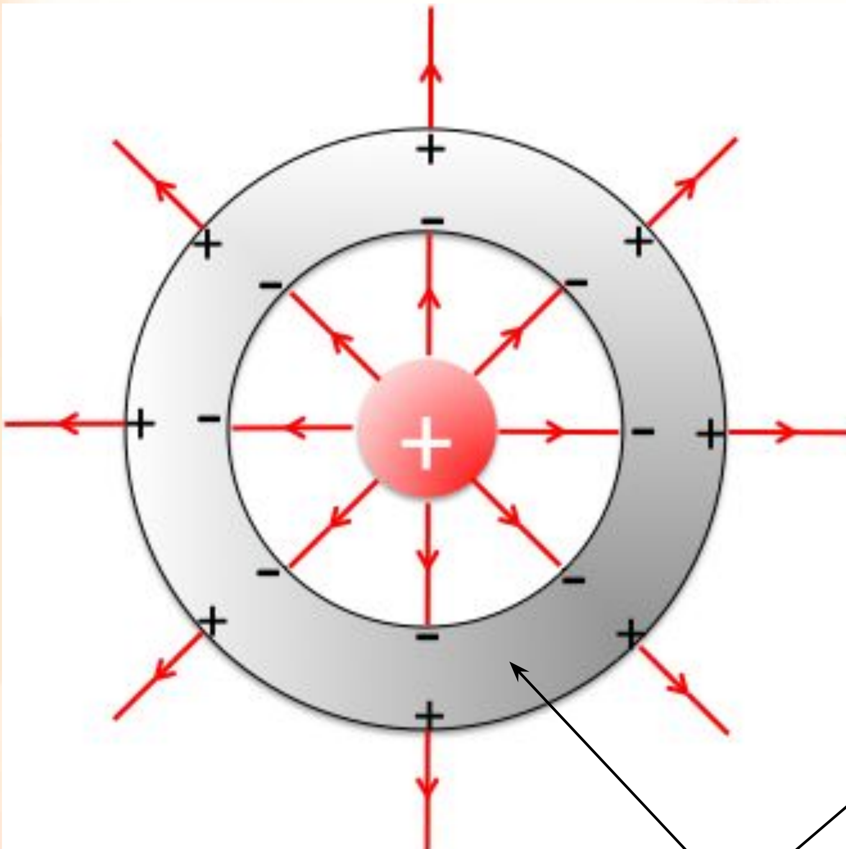
$$\oint_S \vec{\mathbf{D}} d\vec{\mathbf{S}} = q \qquad D_{n'} = 0 \quad \Rightarrow$$

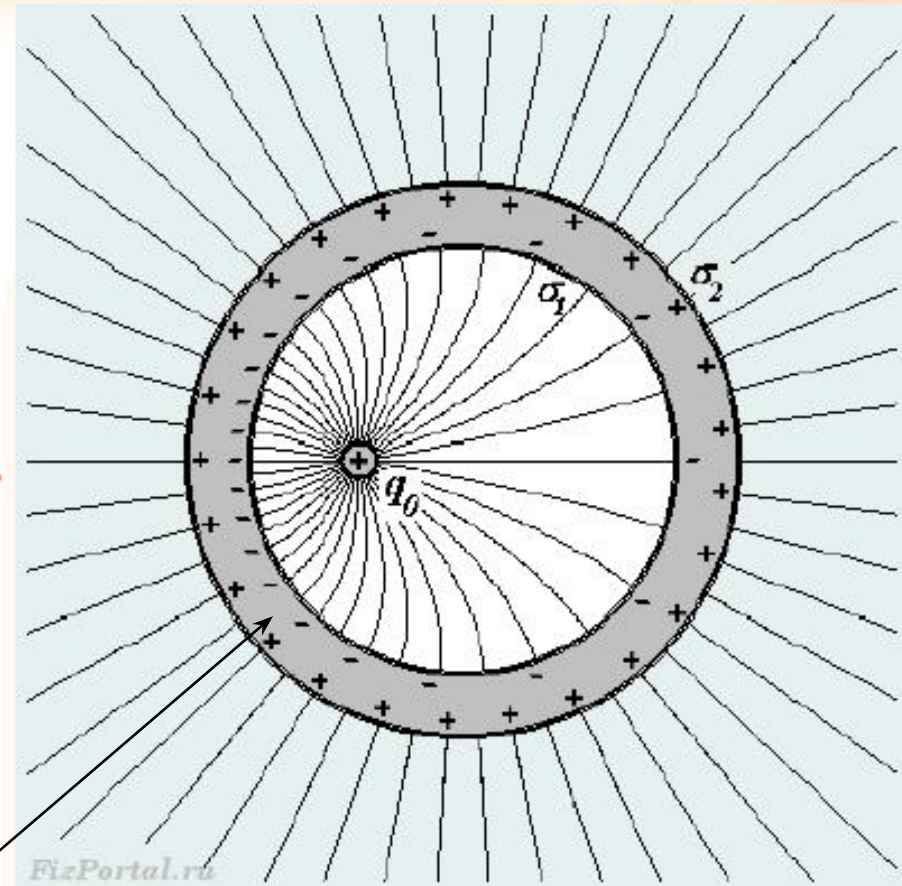
$$D_n \Delta S = \sigma \Delta S \quad \Rightarrow \quad D_n = \sigma$$

$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_\tau = 0}$$

1) Свободные заряды располагаются на поверхности проводника
2) Внутри проводника $\vec{\mathbf{E}} = 0, \varphi = \mathrm{const}, \rho = 0.$
3) Снаружи проводника вектор $\vec{\mathbf{E}}$ ортогонален его поверхности, причём $E_n = \sigma / (\varepsilon\varepsilon_0), E_\tau = 0.$

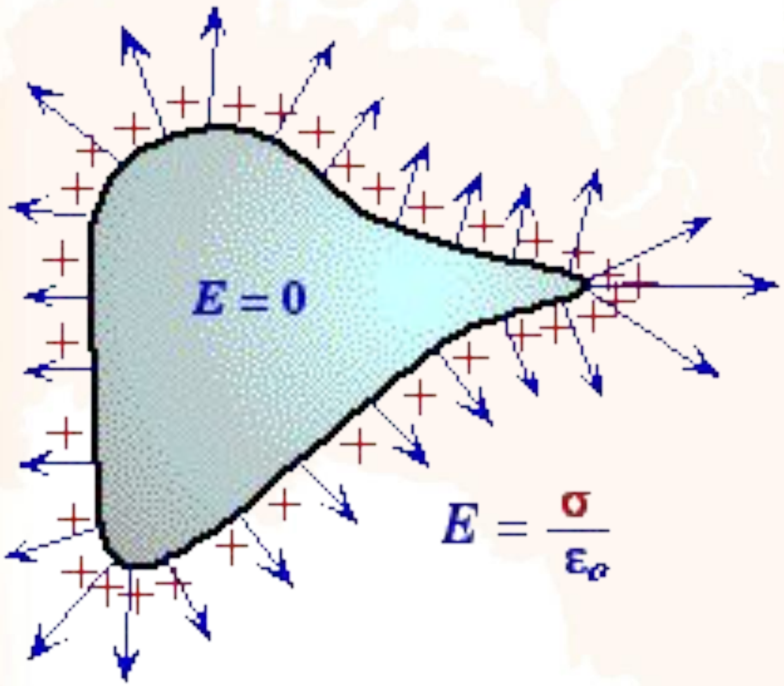
Проводник в электрическом поле





$$\vec{\mathbf{E}} = 0$$

Поле заряженного проводника

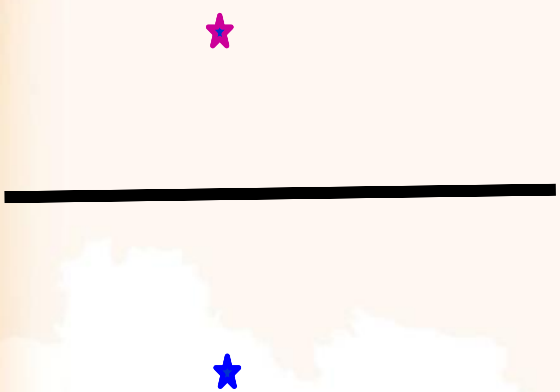


1) Свободные заряды располагаются на поверхности проводника
2) Внутри проводника $\mathbf{E} = 0, \varphi = \text{const}, \rho = 0.$
3) Снаружи проводника вектор $\mathbf{E}$ ортогонален его поверхности, причём

$$E_n = \sigma / (\varepsilon \varepsilon_0), E_\tau = 0.$$

Наведенные заряды в проводнике

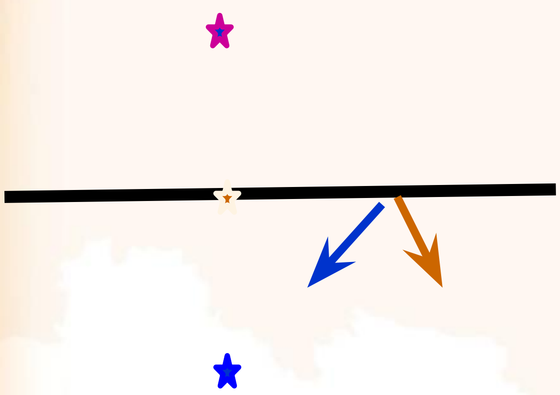
Принцип зеркала.
Пусть у проводящей поверхности располагается какой-то внешний заряд. Свободные заряды проводника распределятся по поверхности так, чтобы создать поле, эквивалентное тому, что создал бы заряд противоположного знака, помещенный в точку, где находилось бы зеркальное изображение внешнего заряда.. .



$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_\tau = 0}$$

Наведенные заряды в проводнике

Пример: Заряд *q* находится на расстоянии *a* от проводящей плоской поверхности. Найти плотность поверхностного заряда на расстоянии r от точки проекции заряда *q* на плоскость. Найти потенциал этой плоскости.



$$E_n(r) = 2(kq/(r^2+a^2))(a/(r^2+a^2)^{1/2}) =$$
$$= 2kqa/(r^2+a^2)^{3/2} => $$
$$\sigma = -\varepsilon qa/2\pi(r^2+a^2)^{3/2}$$
$$\varphi = 0$$

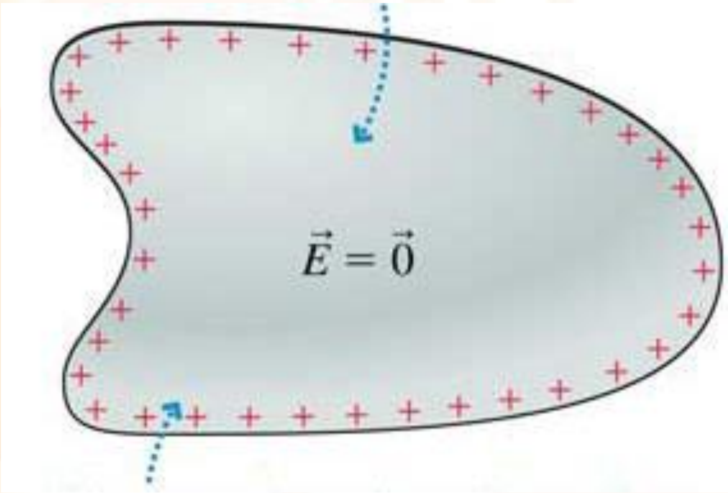
$$\boxed{E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad E_\tau = 0}$$

Электроемкость проводника. Конденсаторы.

Электроёмкость проводника

Опыт: $\varphi \sim q$

$$\varphi = \int_1^\infty \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{l}}, \quad E \sim q \Rightarrow \varphi \sim q$$



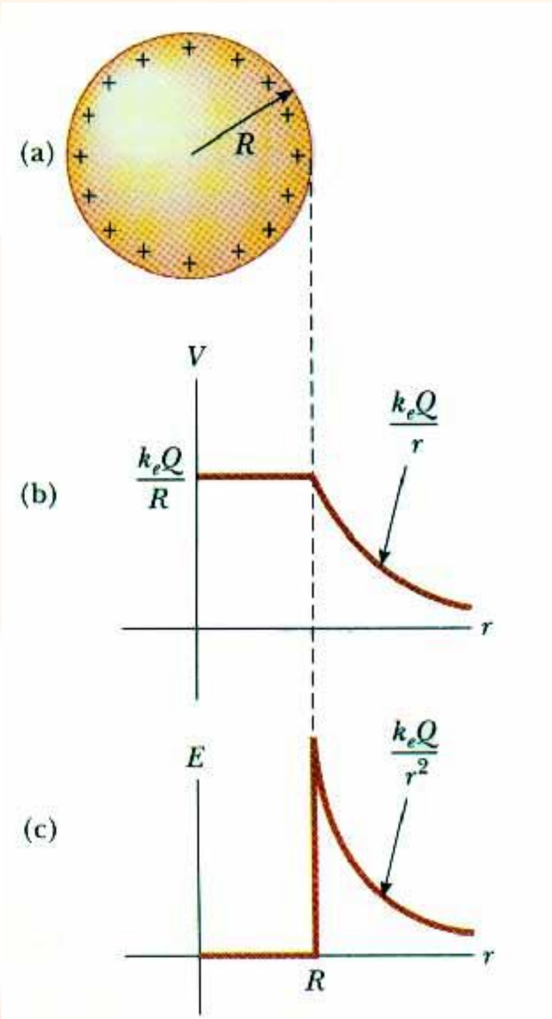
Электроёмкостью уединённого проводника называется коэффициент пропорциональности между зарядом и потенциалом проводника

$$\boxed{q = C\varphi}$$

$$C = \frac{q}{\varphi}, \text{Ф} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$$

Ёмкость проводника зависит от его размеров и формы, но не зависит ни от заряда, ни от потенциала проводника.

Электроёмкость проводника



Ёмкость шара

$$\varphi(R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow$$

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R$$

$$R_з = 6{,}4\cdot 10^6\ м, \quad \Rightarrow$$

$$C = \frac{6{,}4\cdot 10^6}{9\cdot 10^9} \approx 0{,}7\ мФ$$

Электрическая ёмкость конденсатора

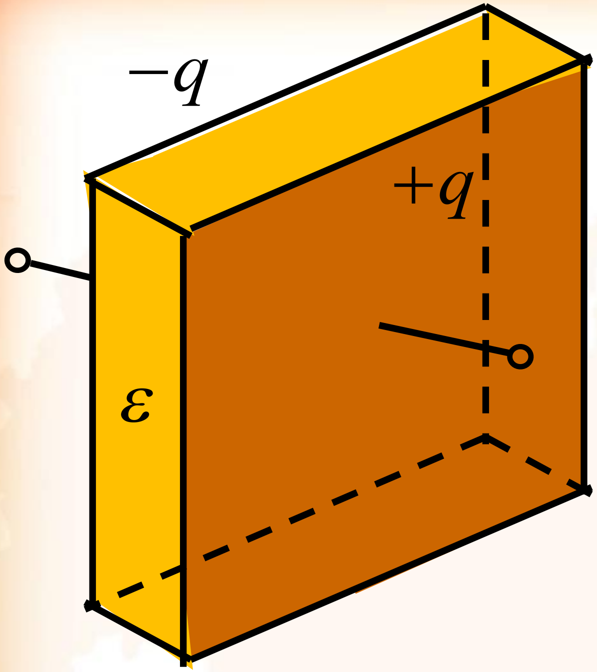
Электрическим конденсатором называют совокупность двух проводников, заряженных одинаковыми по модулю и противоположными по знаку зарядами.

Опыт: $q \sim U = \varphi_1 - \varphi_2$

Электрической ёмкостью конденсатора называют коэффициент пропорциональности между зарядом обкладок и напряжением на конденсаторе.

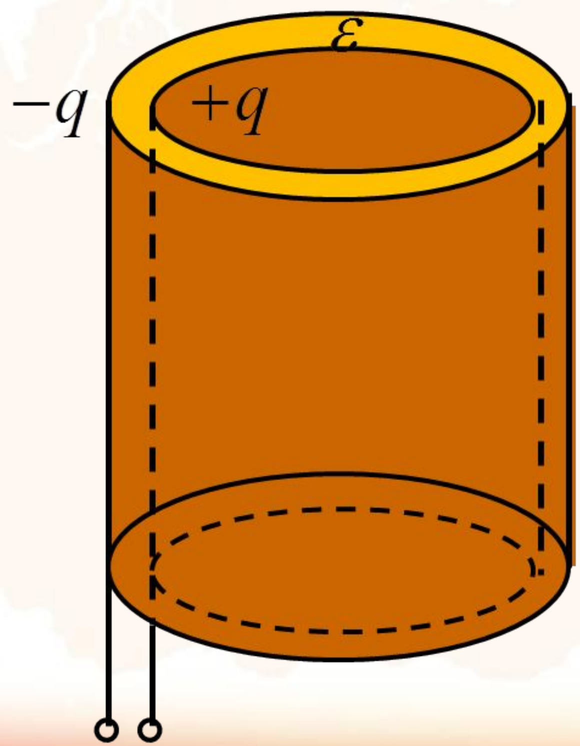
$$\boxed{q = CU} \quad \Rightarrow C = \frac{q}{U}, \text{Ф} = \frac{\text{Кл}}{\text{В}}$$

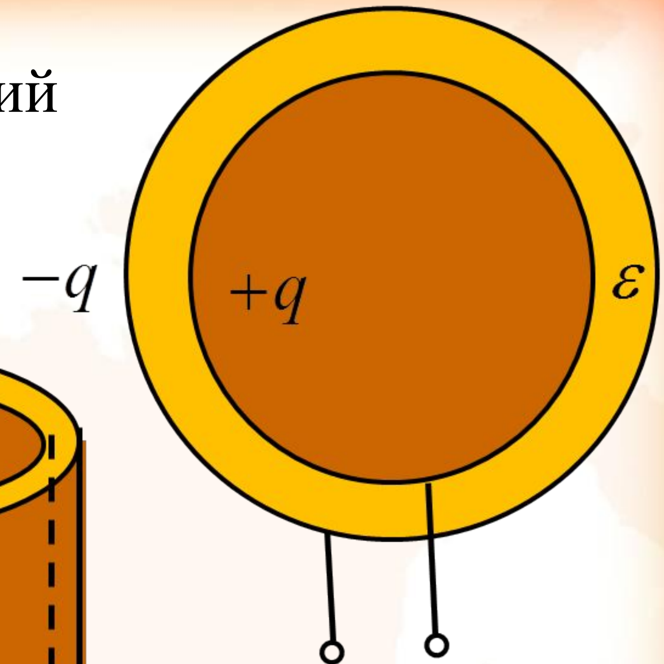
Конденсаторы



Плоский конденсатор

Цилиндрический конденсатор

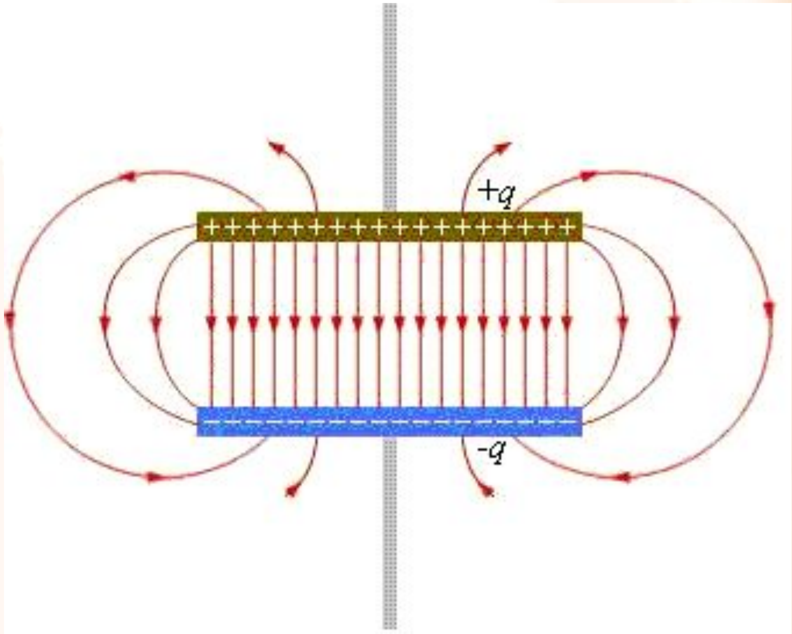




Сферический конденсатор

Конденсаторы

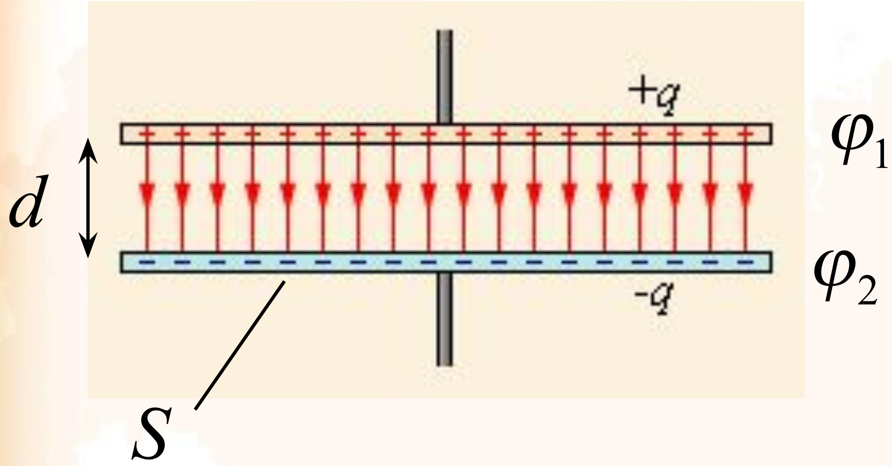
Ёмкость конденсатора зависит от формы и размеров обкладок, расстояния между ними и вида диэлектрика, заполняющего пространство между обкладками.



<u>Ёмкость конденсатора не зависит</u> ни от заряда, ни от напряжения на конденсаторе.

Линии напряжённости реального конденсатора

Ёмкость плоского конденсатора



$$\sigma = \frac{q}{S} \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

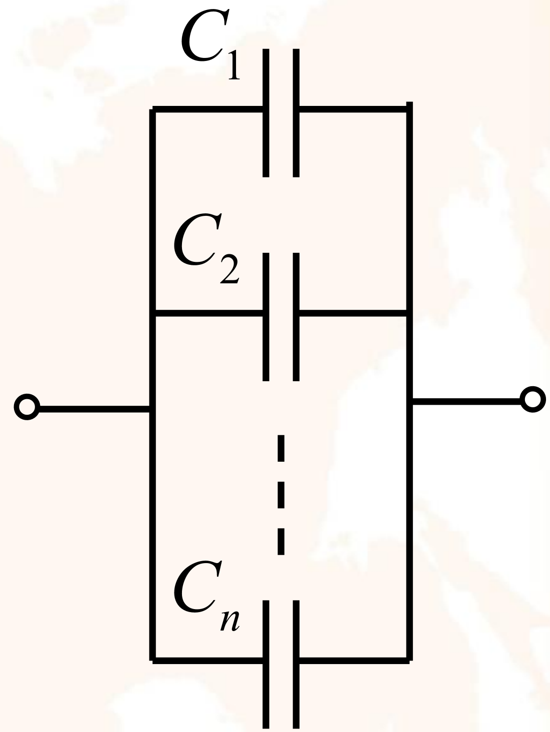
$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma d}{\varepsilon\varepsilon_0} =$$

$$= \frac{qd}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{q}{C} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{\varepsilon\varepsilon_0 S} = \frac{1}{C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}}$$

Конденсаторы

Ёмкость при последовательном и параллельном соединении конденсаторов

$$\frac{1}{C_{\text{общ}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$



$$C_{\text{общ}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

.

Энергия заряженного проводника и плотность энергии электрического поля

Энергия электрического поля

Электрическая энергия заряженного проводника

$$W=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\varphi_i$$

$$q_i \to \sigma dS, \quad q_i \to \rho dV \qquad \sum_i \longrightarrow \int$$

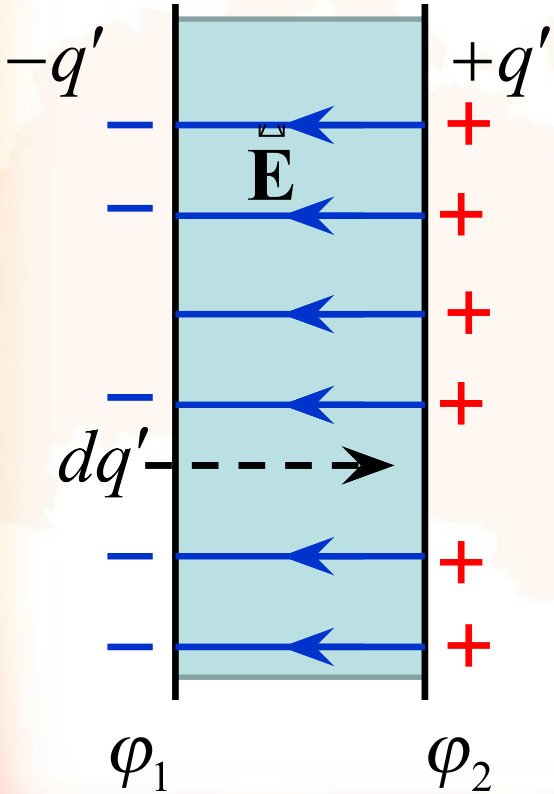
$$W=\frac{1}{2}\int_V \rho\varphi dV+\frac{1}{2}\oint_S \sigma\varphi dS$$

Проводник: $\rho=0, \quad \varphi=\mathrm{const}$

$$W=\frac{1}{2}\oint_S \sigma\varphi dS=\frac{\varphi}{2}\oint_S \sigma dS=\frac{q\varphi}{2}$$

$$\boxed{W=\frac{q\varphi}{2}=\frac{C\varphi^2}{2}=\frac{q^2}{2C}}$$

Электрическая энергия заряженного конденсатора



$$A_{\text{внеш}} = \Delta W = W \quad \text{т.к.} \quad W_{\text{нач}} = 0$$

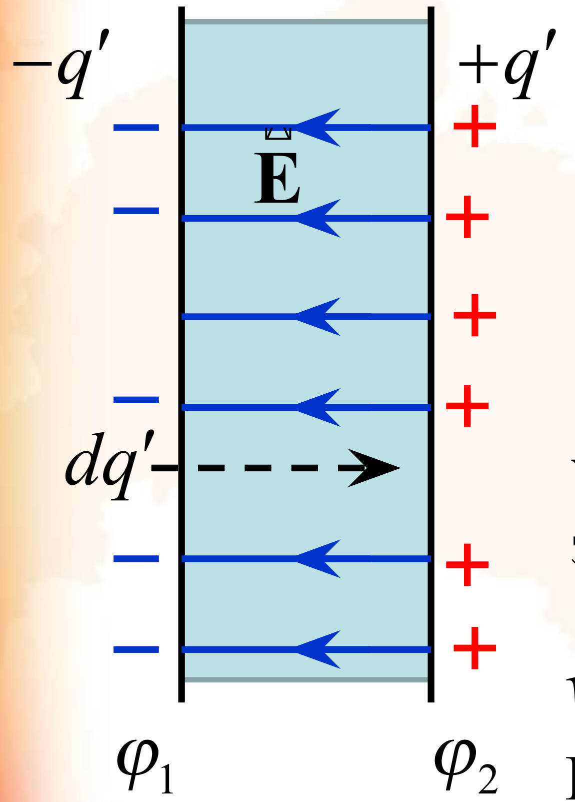
$$d'A_{\text{внеш}} = (\varphi_2 - \varphi_1)\,dq' = U'dq' = \frac{q'dq'}{C}$$

$$A_{\text{внеш}} = \frac{1}{C}\int_0^q q'dq' = \frac{q^2}{2C} = W$$

$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}} \qquad U = \varphi_2 - \varphi_1$$

Энергия электрического поля

Плотность энергии электрического поля



$$\boxed{W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}} \qquad U = \varphi_2 - \varphi_1$$

$$W = CU^2/2 = (\varepsilon\varepsilon_0 S/d)(E^2 d^2/2) = \varepsilon\varepsilon_0 SdE^2/2$$

$$=> \qquad w = W/Sd = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$$

w [Дж/м^3] – плотность энергии электрического поля :

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2 = \boldsymbol{ED}/2$$

В изотропной среде $\boldsymbol{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

В анизотропной среде $D_j = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_i$

Энергия электрического поля

Плотность энергии электрического поля. **Пример.**

$w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2/2$

w [Дж/м^3] – плотность энергии электрического поля :

Найдем энергию поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом q

$$W = \int w\, 4\pi\, r^2 dr = 2\pi\varepsilon_0 \int (q/4\pi\varepsilon_0 r^2)^2 r^2 dr \Rightarrow$$
$$= (q^2/8\pi\varepsilon_0) \int r^{-2} dr = q^2/8\pi\varepsilon_0 r_q$$

Если $r^{-}_{q} \to 0$, $w \to \infty$, *что нехорошо…*

Версия (для электрона): $r_e = e^2/8\pi\varepsilon_0 m_e c^2 \sim 10^{-15}$м

… оказалась тоже не очень продуктивной…

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
13 октября

Примеры решения задач

Пример 1. Два проводящих шарика заряжены зарядами q_1 и q_2. Найти заряды, образующиеся на шариках, после из соединения проволокой с нулевой ёмкостью. Радиусы шариков, r_1 и r_2, намного меньше расстояния между ними.

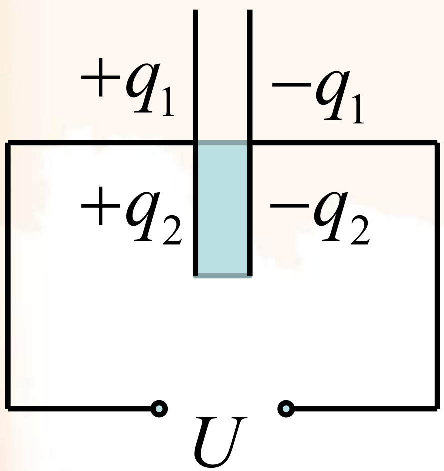
$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2$$

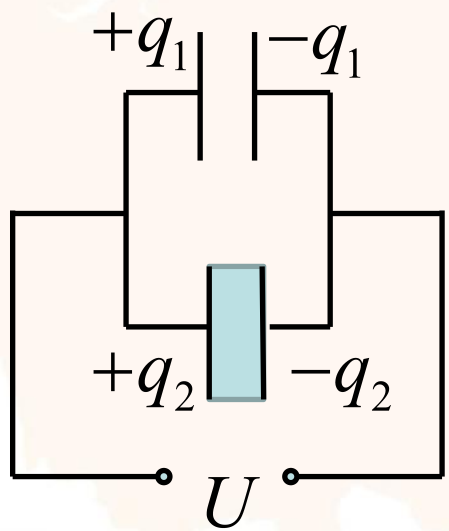
$$\frac{q_1'}{r_1} = \frac{q_2'}{r_2}$$

$$\Rightarrow \quad q_2' = \frac{q_1' r_2}{r_1} \qquad q_1'\left(1 + \frac{r_2}{r_1}\right) = q_1 + q_2 \qquad q_1' = \frac{(q_1 + q_2) r_1}{r_1 + r_2}$$

Примеры решения задач

Пример 2. Плоский воздушный конденсатор ёмкости C_0 подключён к источнику с напряжением U. Половину пространства между обкладками конденсатора заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Какой заряд пройдёт через источник?





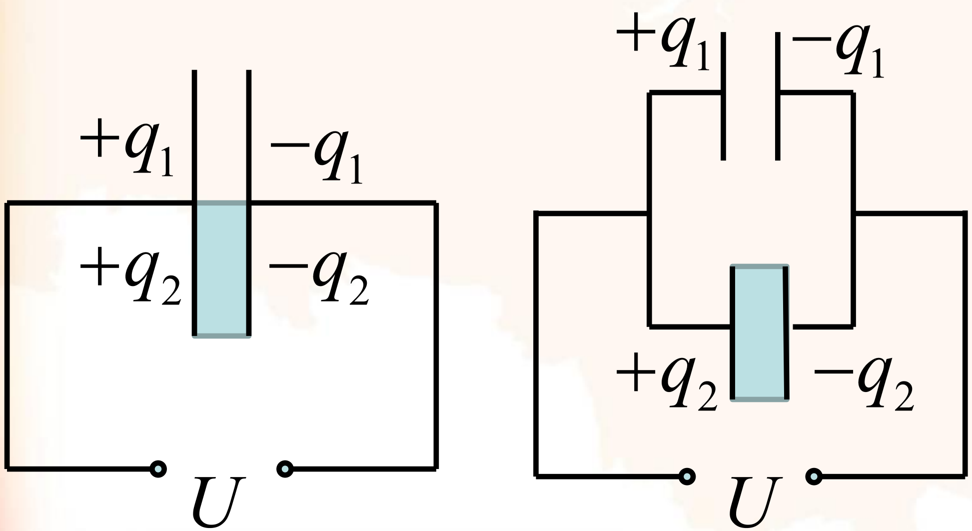
$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$$

$$C_1 = \frac{C_0}{2}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon C_0}{2}$$

$$q_1 = \frac{C_0 U}{2}, \qquad q_2 = \frac{\varepsilon C_0 U}{2}$$

Примеры решения задач

Пример 2. Плоский воздушный конденсатор ёмкости C_0 подключён к источнику с напряжением U. Половину пространства между обкладками конденсатора заполняют диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε. Какой заряд пройдёт через источник?



$$q_{к} = q_1 + q_2 = \frac{C_0 U (1+\varepsilon)}{2}$$

$$q_{н} = C_0 U$$

$$\Delta q = q_{к} - q_{н} = \frac{C_0 U (\varepsilon - 1)}{2}$$

Примеры решения задач

Пример 3. Используя понятие плотности электрической энергии выведите формулу для энергии заряженного плоского конденсатора.

$$D = \sigma, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} \qquad w = \frac{\mathbf{E}\mathbf{D}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$W = wV = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon\varepsilon_0}Sd \qquad \sigma = \frac{q}{S} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{q^2 d}{2S\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{S\varepsilon\varepsilon_0}{d} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{q^2}{2C}$$

Примеры решения задач

Пример 4. В вакууме расположен шар радиуса R с диэлектрической проницаемостью ε, который равномерно заряжен с постоянной плотностью заряда ρ. Найдите зависимость плотности электрической энергии от расстояния до центра шара.

1). $r < R$ $\quad 4\pi r^2 D_1 = \rho \dfrac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow D_1 = \dfrac{\rho r}{3}, \quad E_1 = \dfrac{\rho r}{3\varepsilon\varepsilon_0}$

$$w_1 = \frac{E_1 D_1}{2} = \frac{\rho^2 r^2}{18\varepsilon\varepsilon_0}, \quad dV = 4\pi r^2 dr, \quad W_1 = \int_{V_1} w_1 dV$$

$$W_1 = \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon\varepsilon_0}$$

Примеры решения задач

2). $r > R$ $\qquad 4\pi r^2 D_2 = \rho \dfrac{4\pi R^3}{3} \quad \Rightarrow \quad D_2 = \dfrac{\rho R^3}{3r^2}$

$E_2 = \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$, т.к. $\varepsilon = 1$ $\qquad w_2 = \dfrac{E_2 D_2}{2} = \dfrac{\rho^2 R^6}{18\varepsilon_0 r^4}$

$$W_2 = \int\limits_{V_2} w_2 dV = \frac{2\pi\rho^2 R^6}{9\varepsilon_0} \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}$$

$$W = W_1 + W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0} = \frac{2\pi\rho^2 R^5\left(1+5\varepsilon\right)}{45\varepsilon\varepsilon_0}$$

Спасибо за внимание!

Следующая лекция
13 октября

Энергия электрического поля

Плотность энергии электрического поля

$$\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\int\limits_{V_{\text{тела}}} \rho\varphi dV = \frac{1}{2}\int\limits_{V_{\infty}} \rho\varphi dV,$$

$$\rho = \left(\nabla, \vec{\mathbf{D}}\right) \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\int\limits_{V_{\infty}} \varphi\left(\nabla, \vec{\mathbf{D}}\right) dV$$

$$\left(\nabla, \varphi\vec{\mathbf{D}}\right) = \varphi\left(\nabla, \vec{\mathbf{D}}\right) + \left(\vec{\mathbf{D}}, \nabla\varphi\right) \quad \Rightarrow$$

$$\varphi\left(\nabla, \vec{\mathbf{D}}\right) = \left(\nabla, \varphi\vec{\mathbf{D}}\right) - \left(\vec{\mathbf{D}}, \nabla\varphi\right) \quad \Rightarrow$$

Энергия электрического поля

$$W = \frac{1}{2}\int_{V_\infty} \varphi\left(\nabla, \vec{\mathbf{D}}\right)dV = \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\left(\nabla, \varphi\vec{\mathbf{D}}\right)dV - \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\left(\vec{\mathbf{D}}, \nabla\varphi\right)dV =$$

$$= \frac{1}{2}\oint_{S_\infty}\varphi\vec{\mathbf{D}}\overrightarrow{\mathbf{dS}} + \frac{1}{2}\int_{V_\infty}\vec{\mathbf{E}}\vec{\mathbf{D}}dV \qquad \varphi \sim \frac{1}{r} \quad D \sim \frac{1}{r^2} \quad S \sim r^2$$

$$\oint_{S_\infty}\varphi\vec{\mathbf{D}}\overrightarrow{\mathbf{dS}} \sim \frac{1}{r}\frac{1}{r^2}r^2 \sim \frac{1}{r} \to 0$$

$$(r \to \infty)$$

$$\boxed{W = \int_V w\,dV \qquad w = \frac{\left(\vec{\mathbf{E}}, \vec{\mathbf{D}}\right)}{2}}$$

$$V_\infty = V$$

$$\vec{\mathbf{D}} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}} \quad \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$$