# Экономические задачи

# Дифференцированный платеж


Размер платежа постоянно уменьшается, погашение основного долга равномерно распределено на весь срок кредита

# Задача 1

В июне взяли кредит в банке на сумму **6 млн. рублей на 12 лет**. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на **20%** по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- **в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль прошлого года.**

Сколько млн. рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

# Решение:

Кредит **S=6 млн. руб. взят на n=12 лет**

По условию долг перед банком

(в млн. рублей)

по состоянию на июль

должен уменьшаться **равномерно**

на

$$\frac{S}{n} = \frac{6 \text{ млн}}{12} = 0,5$$ **млн. рублей**

# Составим таблицу
# (все числа в млн. рублей)

| Год | Долг в июле | Долг после начисления процентов | Долг после платежа | Выплата |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | | 5,5 | 7,2 – 5,5 = 1,7 |
| 2 | 5,5 | | 5 | 6,6 – 5 = 1,6 |
| 3 | 5 | | 4,5 | 1,5 |
| 4 | 4,5 | | 4 | 1,4 |
| 5 | 4 | 4,8 | 3,5 | 1,3 |
| 6 | 3,5 | 4,2 | 3 | 1,2 |
| 7 | 3 | 3,6 | 2,5 | 1,1 |
| 8 | 2,5 | 3 | 2 | 1 |
| 9 | 2 | 2,4 | 1,5 | 0,9 |
| 10 | 1,5 | 1,8 | 1 | 0,8 |
| 11 | 1 | 1,2 | 0,5 | 0,7 |
| 12 | 0,5 | 0,6 | 0 | 0,6 |

Долг после начисления процентов
каждый год **уменьшается** на

$\mathbf{0,5}$ млн.$\cdot \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}} = \mathbf{0,6}$ **млн.** рублей,

Долг после платежа **уменьшается**
ежегодно **на 0,5 млн. рублей**.

Поэтому платеж **уменьшается** каждый год на одну
и ту же величину (в данной задаче на 0,1 млн. рублей).

То есть все выплаты представляют собой
**арифметическую прогрессию**, причем

$$\boldsymbol{a_1 = 1,7;\ a_{12} = 0,6;\ n = 12}.$$

$$\boldsymbol{S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{1,7+0,6}{2} \cdot 12 = 13,8.}$$

Ответ: общая сумма выплат после погашения
кредита составила 13,8 млн. рублей.

# Задача 2

В июле планируется взять кредит в банке на сумму **8 млн. рублей**. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на **20%** по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

# Вопросы к задаче 2

**2.1** На какой **минимальный срок** следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту **не превысил 2,4 млн. рублей**?

**2.2** На **сколько лет** планируется взять кредит, если известно, что **общая сумма** выплат после его полного погашения составила **16 млн. рублей**.

**2.3** Чему будет равна **общая сумма** выплат после полного погашения кредита, если **наибольший годовой платеж** составит **2,4 млн. рублей**?

# Решение:

Пусть кредит взят на **$n$ лет.**
По условию долг перед банком
(в млн. рублей) по состоянию на июль
должен **уменьшаться до «0» равномерно**.

Кредит $S = 8$ **млн. рублей взят на $n$ лет**, поэтому каждый год долг должен уменьшаться на одну и ту же величину

$$\frac{S}{n} = \frac{8}{n}$$

# Составим таблицу (все числа в млн. рублей)

| Года | Долг в июле | Долг после начисления процентов | Долг после платежа | Выплата |
|---|---|---|---|---|
| 1 год | **8** | | | |
| 2 год | | | | |
| | | | | |
| n год | | | **0** | |

# Вопрос к задаче 2.1

На какой **минимальный срок** следует брать кредит, чтобы **наибольший годовой платеж** по кредиту не превысил **2,4 млн. рублей?**

# Решение задачи 2.1:

При «дифференцированном платеже»
каждая последующая выплата меньше предыдущей.
Значит,
**наибольшая выплата будет в первый год**.
По условию задачи годовой платеж по кредиту
**не превышает 2,4 млн. рублей.**

Следовательно,

$$\mathbf{1,6+\frac{8}{n}\le 2,4}$$

$$\frac{8}{n}\le 0{,}8$$

$$\boldsymbol{n\ge 10}$$

Минимальное значение *n* равно 10.

Ответ: 10 лет.

# Вопрос к задаче 2.2

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что **общая сумма выплат** после его полного погашения составила **16 млн. рублей.**

# Решение задачи 2.2:

Выпишем отдельно сумму всех выплат

$$1{,}6+\frac{8}{n}+\ 1{,}6+\frac{6{,}4}{n}+1{,}6+\frac{4{,}8}{n}+\cdots+\frac{9{,}6}{n}$$

Сумма выплат представляет собой арифметическую прогрессию, например, $(a_n)$, причем

$$\boldsymbol{a_1=1,6+\frac{8}{n};\ a_n=\frac{9{,}6}{n}}$$

Тогда сумму $S_n$ можно найти по формуле:

$$\boldsymbol{S_n}=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\left(1{,}6+\frac{8}{n}+\frac{9{,}6}{n}\right)\cdot\frac{n}{2}$$

$$=\left(1{,}6+\frac{17{,}6}{n}\right)\cdot\frac{n}{2}=\boldsymbol{0,8n+8,8}$$

# Решение задачи 2.2:

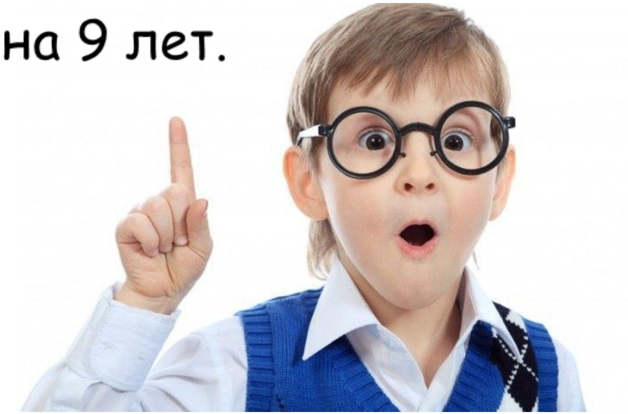
По условию задачи общая сумма выплат

**16 млн. рублей.**

Получаем уравнение:

$$\mathbf{0,8}\boldsymbol{n}+\mathbf{8,8}=\mathbf{16}$$
$$\mathbf{0,8}\boldsymbol{n}=\mathbf{16}-\mathbf{8,8}$$
$$\mathbf{0,8}\boldsymbol{n}=\mathbf{7,2}$$
$$\boldsymbol{n}=\mathbf{9}$$

Ответ: на 9 лет.



# Вопрос к задаче 2.3

Чему будет равна **общая сумма** выплат после полного погашения кредита, если **наибольший годовой платеж** составит **2,4 млн. рублей**?

# Решение задачи 2.3

Наибольший годовой платеж будет в 1-й год, то есть будет равен $\mathbf{1,6+\frac{8}{n}}$ млн. рублей, а по условию задачи он должен быть равен **2,4 млн.** рублей.

Следовательно, $$\mathbf{1,6+\frac{8}{n}=2,4}$$

$$\frac{8}{n}=0{,}8$$

$$\boldsymbol{n=10}$$

$$a_1=2{,}4;\ a_{10}=\frac{9{,}6}{10}=0{,}96$$

$$S_n=\frac{2{,}4+0{,}96}{2}\cdot 10=(1{,}2+0{,}48)\cdot 10=1{,}68\cdot 10=$$

$$=\mathbf{16,8}\ \text{(млн. рублей)}$$

Ответ: 16,8 млн. рублей.

# Аннуитетный платеж

# Задача 1

В июле планируется взять кредит на сумму **S** рублей.

Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на **20%** по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга. Выплаты равные.

# Вопросы

**1.1** Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был погашен тремя равными платежами (то есть за три года).
$S = 5\ 642\ 000$ рублей.

**1.2** На сколько общая сумма выплат больше самого кредита?

**1.3** Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года). Равные платежи, $x = 1{,}08$ млн. рублей.

**1.4** На сколько больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)? $S = 5\ 005\ 000$ рублей.

# Алгоритм решения задач

$S$ – кредит, $x$ рублей – выплаты, $r = 20\%$

$\Rightarrow k = 1{,}2 = \frac{6}{5}.$

1 год $\quad \boldsymbol{\frac{6}{5}S - x}$

2 год

$$\frac{6}{5}\left(\frac{6}{5}S - x\right) - x = \frac{36}{25}S - \frac{6}{5}x - \frac{5}{5}x = \boldsymbol{\frac{36}{25}S - \frac{11}{5}x}$$

3 год

$$\frac{6}{5}\left(\frac{36}{25}S - \frac{11}{5}x\right) - x = \frac{216}{125}S - \frac{66}{25}x - \frac{25}{25}x = \boldsymbol{\frac{216}{125}S - \frac{91}{25}x}$$

Так как по условию задачи кредит полностью погашен за три года, то

$$\frac{216}{125}S - \frac{91}{25}x = 0 \;\Big|\; \cdot 125$$

$$\boldsymbol{216S = 455x}$$

# Решение задач 1.1-1.2:

**1.1** Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был погашен тремя равными платежами (то есть за три года). $S = 5\,642\,000$ рублей.

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{216}}{\mathbf{455}}\boldsymbol{S} = \frac{216 \cdot 5642000}{455} = 216 \cdot 12400 =$$
$$= 2\,678\,400 \text{ рублей.}$$

**1.2** На сколько общая сумма выплат больше самого кредита?

$$\boldsymbol{3x - S} = 3 \cdot \frac{216}{455}S - S = \frac{648}{455}S - \frac{455}{455}S = \frac{193}{455}S =$$
$$= \frac{193 \cdot 5\,642\,000}{455} = 193 \cdot 12400 = 2\,393\,200 \text{ рублей}$$

или $\boldsymbol{3x - S} = 3 \cdot 2\,678\,400$ - $5\,642\,000 =$
$= 2\,393\,200$ рублей

# Решение задачи 1.3:

**1.3** Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года). Равные платежи, $\mathrm{x} = 1{,}08$ млн. рублей.

$$\boldsymbol{S} = \frac{455}{216}x = \frac{455 \cdot 1{,}08}{216} = \frac{4{,}55 \cdot 108}{216} = 4{,}55 \cdot 0{,}5 =$$
$$= 2{,}275 \text{ млн. рублей.}$$

# Решение задачи 1.4:

**1.4** На сколько больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен **тремя равными платежами** (то есть за три года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен **двумя равными платежами** (то есть за два года)? $S = 5\,005\,000$ рублей.

$x$ **рублей** – одна из трех равных выплат, если кредит будет погашен тремя равными платежами, то есть

$$\mathbf{216}\boldsymbol{S} = \mathbf{455}\boldsymbol{x} \;\; => \;\; x = \frac{216}{455}S$$

Три выплаты, соответственно:

$$\mathbf{3}\boldsymbol{x} = 3 \cdot \frac{216}{455}S = \frac{\mathbf{648}}{\mathbf{455}}\boldsymbol{S}$$

# Решение задачи 1.4:

***y* рублей** – одна из двух равных выплат, если кредит будет погашен двумя равными платежами, то есть

$$\frac{36}{25}S = \frac{11}{5}y \ /\cdot 25$$

$$36S = 55y$$

$$\boldsymbol{y = \frac{36}{55}S}$$

две выплаты, соответственно:

$$\boldsymbol{2y} = 2\cdot\frac{36}{55}S = \boldsymbol{\frac{72}{55}S}$$

$$\boldsymbol{3x - 2y = \frac{648}{455}S - \frac{36}{55}S} = \frac{648}{91\cdot 5}S - \frac{36}{11\cdot 5}S = \frac{11\cdot 648}{11\cdot 91\cdot 5}S - \frac{91\cdot 36}{91\cdot 11\cdot 5}S =$$

$$= \frac{7128-6552}{5005}S = \boldsymbol{\frac{576\cdot S}{5005}} = \frac{576\cdot 5005000}{5005} = 576\,000$$ рублей.

# Задача 2

Планируется выдать кредит на **целое число миллионов рублей на 5 лет.**

- В середине каждого года действия кредита долг заемщика возрастает на 20% по сравнению с началом года.
- **В конце 1-го и 2-го годов** заемщик выплачивает **только проценты по кредиту**, оставляя **долг неизменно равным первоначальному.**
- В конце 3-го, 4-го и 5-го годов заемщик выплачивает **одинаковые суммы**, погашая долг полностью. Найдите наибольший размер кредита, при котором общая сумма выплат будет меньше **8 млн. рублей**.

# Решение задачи 2:

Пусть размер кредита $S$ рублей.
Тогда в конце 1-го и 2-го годов заемщик выплачивает по $\mathbf{0,2S}$ млн. рублей.

Всего $\mathbf{0,4S}$ = $\frac{2}{5}\boldsymbol{S}$ за 2 года.

За оставшиеся три года:

$$x = \frac{216}{455}S; \quad \mathbf{3}\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{648}}{\mathbf{455}}\boldsymbol{S}$$

Значит, все выплаты

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}\boldsymbol{S} + \frac{\mathbf{648}}{\mathbf{455}}\boldsymbol{S} = \frac{182}{455}S + \frac{648}{455}S = \frac{830}{455}S = \frac{\mathbf{166}}{\mathbf{91}}\boldsymbol{S}$$

$$\frac{166}{91}S < 8$$

$$S < \frac{91 \cdot 8}{166}$$

$$S < \frac{364}{83}$$

$$S < 4\frac{32}{83}, \quad S \epsilon N$$

Ответ: 4 млн рублей.


Ну-с, кредит оформлять будем?..
=%
БАНК
ВАРуся