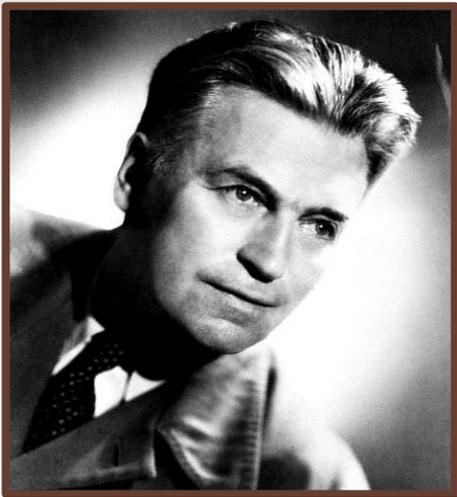


Логарифмические уравнения.

Основные методы их решения.



Ричард

Олдингтон

(1892 – 1962гг..) -
английский поэт,
прозаик, критик

«Ничему тому, что важно
знать, научить нельзя, –
всё, что может сделать
учитель, это указать
дорожки»

*«Кто говорит – тот сеет, кто
слушает – тот собирает».*

Русская народная пословица

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком логарифма или (и) в его основании, называется логарифмическим уравнением.

$$\log_a f(x) = b$$

$$\log_{f(x)} b = a$$

1. Решение логарифмических уравнений на основании определения логарифма.

Определение логарифма: $\log_a b = c : a^c = b, a > 0, b > 0, a \neq 1$.

$$\log_a f(x) = c \Rightarrow f(x) = a^c, \quad f(x) > 0, a > 0, a \neq 1.$$

Пример 1:

$$\log_4 x = 2$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0,$$

$$x = 4^2,$$

$$x = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2:

$$\begin{aligned}\log_3(2x + 1) &= 2, \\ 2x + 1 &= 3^2, \\ 2x + 1 &= 9, \\ x &= 4.\end{aligned}$$

Ответ: 4.

Пример 3:

$$\begin{aligned}4^{x-3} &= 5, \\ x - 3 &= \log_4 5, \\ x &= 3 + \log_4 5.\end{aligned}$$

Ответ: $3 + \log_4 5$.

В таких уравнениях нет посторонних корней, поэтому проверка не требуется.

Способы решения логарифмических уравнений

1. Решение уравнений на основании определения логарифма, например, уравнение $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1, b > 0$) имеет решение $x = a^b$.
2. Метод потенцирования. Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их:
если $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, то $f(x) = g(x)$, $f(x) > 0, g(x) > 0, a > 0, a \neq 1$.
3. Метод введения новой переменной.
4. Метод логарифмирования обеих частей уравнения.
5. Метод приведения логарифмов к одному и тому же основанию.
6. Функционально – графический метод.

2. Метод потенцирования.

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их.

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x), \text{ где } a > 0, a \neq 1, f(x) > 0, g(x) > 0.$$

Пример:

$$\text{●} (x^2 + 7x - 5) = \text{●} (4x - 1),$$

$$x^2 + 7x - 5 = 4x - 1,$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0,$$

$$x_1 = 1, x_2 = -4.$$

Проверка:

$$x = 1 \Rightarrow \log_2(1^2 + 7 \cdot 1 - 5) = \log_2(4 \cdot 1 - 1) \Rightarrow \log_2 3 = \log_2 3 \text{ - верно}$$

$$x = -4 \Rightarrow \log_2((-4)^2 + 7 \cdot (-4) - 5) = \log_2(4 \cdot (-4) - 1) \Rightarrow \log_2(-17) = \log_2(-17) \\ \text{- не верно}$$

Ответ: 1.

- В таких уравнениях обязательна проверка или нахождение ОДЗ. •

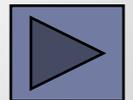
Метод потенцирования (с нахождением ОДЗ)

$$\log_3 (x^2-3x-5)=\log_3 (7-2x)$$

- Записать условия, определяющие область допустимых значений (О.Д.З.): $f(x) > 0$, $g(x) > 0$
- Перейти от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$
- Решить полученное уравнение
- Проверить полученные корни по условиям, определяющим область допустимых значений переменной (О.Д.З.).

Те корни уравнения, которые **удовлетворяют** этим условиям, **являются корнями** логарифмического уравнения. Те корни уравнения, которые **не удовлетворяют хотя бы одному из этих условий**, объявляются **посторонними корнями** логарифмического уравнения.

- Записать ответ



Решение уравнения методом

потенцирования

Освободимся
от знаков
логарифмов

Найдём
О.Д.З.

Проверим
корни по
условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_3 (x^2 - 3x - 5) &= \log_3 (7 - 2x) \\ x^2 - 3x - 5 &= 7 - 2x \end{aligned}$$

Решим
квадра
тное
уравне
ние

$$x = 4$$

$$x = -3$$

Не
удовлетворяет
второму
неравенству
системы

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = 4, x = -3$$

Удовлетворяет
обоим
неравенствам

Ответ

$$x = -3$$



3. Метод введения новой переменной (алгоритм)

$$2\log^2_5 x + 5\log_5 x + 2 = 0$$

- Ввести новую переменную, найти О.Д.З.
- Решить получившееся уравнение и найти значение новой переменной
- Сделать подстановку найденного значения новой переменной и вычислить неизвестную переменную
- Записать ответ
-



Решение уравнения методом введения новой переменной

Введем новую
переменную
 $y = \log_5 x, x > 0$

$$2\log_5^2 x + 5\log_5 x + 2 = 0$$

Получим

$$2y^2 + 5y + 2 = 0$$

Сделать подстановку
найденного значения
переменной y и
вычислить
значение переменной x

$$D=9$$

$$y = -2,$$
$$y = -1/2$$

Решим
квадратное
уравнение

Ответ

$$x = 1/25$$

$$x = 1/\sqrt{5}$$

$$1) \log_5 x = -2,$$
$$x = 1/25$$

$$2) \log_5 x = -1/2,$$
$$x = 1/\sqrt{5}$$



Введение новой переменной.

Решить уравнение: $\log_3^2 x - 2 \log_3 x - 3 = 0$

Решение: ОДЗ: $x > 0$.

Пусть $\log_3 x = y$, тогда уравнение примет вид:

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Дискриминант $D > 0$. Корни по теореме Виета:

$$y_1 = 3; y_2 = -1$$

Вернемся к замене: $\log_3 x = 3$ или $\log_3 x = -1$

Решив простейшие логарифмические уравнения, получим:

$$x_1 = 3^3 = 27; x_2 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Ответ: 27; $\frac{1}{3}$

Пример

$$\log_3^2 x - \log_3 x = 2$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда $t^2 - t = 2$, $t^2 - t - 2 = 0$.

$$t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Значит, $\log_3 x = -1$

или

$$\log_3 x = 2$$

$$x = 3^{-1}$$

$$x = 3^2$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

$$x = 9.$$

Ответ: $\frac{1}{3}, 9$.

1. 4. Метод логарифмирования обеих частей уравнения.

Если в показатели степени содержится логарифм, то обе части уравнения логарифмируют по тому основанию, которое содержится в основании логарифма, находящегося в показателе степени.

Решите уравнение

$$X^{\log_3 x^2} = 3X, \text{ возьмем от обеих частей уравнения логарифм}$$

по основанию 3

Вопрос :

1. Это – равносильное преобразования ?
2. Если да то почему ?

Получим

$$\log_3 X^{\log_3 x^2} = \log_3 (3x)$$

Учитывая теорему 3, получаем :

$$\begin{aligned} \log_3 x^2 \log_3 x &= \log_3 3x, \\ 2 \log_3 x \log_3 x &= \log_3 3 + \log_3 x, \\ 2 \log_3^2 x &= \log_3 x + 1, \\ 2 \log_3^2 x - \log_3 x - 1 &= 0, \end{aligned}$$

заменим $\log_3 x = t$, $x > 0$ $2t^2 - t - 1 = 0$; $\Delta = 9$; $t_1 = 1$, $t_2 = -1/2$

● $\log_3 x = 1$, $x = 3$,

● $\log_3 x = -1/2$, $x = 1/\sqrt{3}$.

Ответ: 3 ; $1/\sqrt{3}$.

Метод логарифмирования.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$$

$$f(x) > 0, g(x) > 0, h(x) > 0, h(x) \neq 1.$$

Пример:

$$x^{\log_3 x - 4} = \frac{1}{27},$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log_3 (x^{\log_3 x - 4}) &= \log_3 \frac{1}{27}, \\ (\log_3 x - 4) \log_3 x &= -3. \end{aligned}$$

$$\log_c a^p = p \log_c a$$

Пусть $\log_3 x = t$, тогда

$$(t - 4)t = -3,$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0,$$

$$t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Значит,

$$\log_3 x = 1$$

$$x = 3^1,$$

$$x = 3.$$

или

$$\log_3 x = 3,$$

$$x = 3^3,$$

$$x = 27.$$

Ответ: 3; 27.

5. Метод приведения логарифмов к одному и тому

ОСНОВАНИЮ.

Решение уравнений с разными основаниями

$$\log_a x = \log_{\sqrt{a}} 2 + \log_{\frac{1}{a}} 3$$

$$\text{одз} : x > 0$$

$$\log_a x = \log_{a^{\frac{1}{2}}} 2 + \log_{a^{-1}} 3$$

Опираясь на свойство:

$$\log_a x = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_a 2 + \frac{1}{-1} \log_a 3$$

$$\log_{a^q} b = \frac{1}{q} \log_a b$$

$$\log_a x = 2 \log_a 2 - \log_a 3$$

$$\log_a x = \log_a \frac{2^2}{3}$$

$$x = \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \in \text{одз}$$

$$\text{Ответ} : \frac{4}{3}$$

Пример:

$$\log_7 x - \log_x 7 = 2,5$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Приведём логарифмы к одному основанию – 7: $\log_7 x - \frac{1}{\log_7 x} = \frac{5}{2}$.

Подстановка: $t = \log_7 x$. Уравнение примет вид: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$,
 $2t^2 - 5t + 2 = 0$,
 $t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$.

Значит, $\log_7 x = 2$
 $x = 7^2$,
 $x = 49$.

или

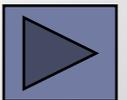
$$\log_7 x = \frac{1}{2}$$
$$x = 7^{\frac{1}{2}},$$
$$x = \sqrt{7}.$$

Ответ: $\sqrt{7}, 49$.

Функционально-графический метод(алгоритм)

$$\log_2 x = -x + 1$$

- Ввести функцию $f(x)$, равную левой части и $g(x)$, равную правой части
- Построить на одной координатной плоскости графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$
- Определить точки пересечения графиков
- Найти абсциссы точек пересечения – это и есть корни уравнения
- Записать ответ



Решение уравнения функционально- графическим методом

Решим
уравнение
графически

$$\log_2 x = -x+1$$

Построим
график уравнения

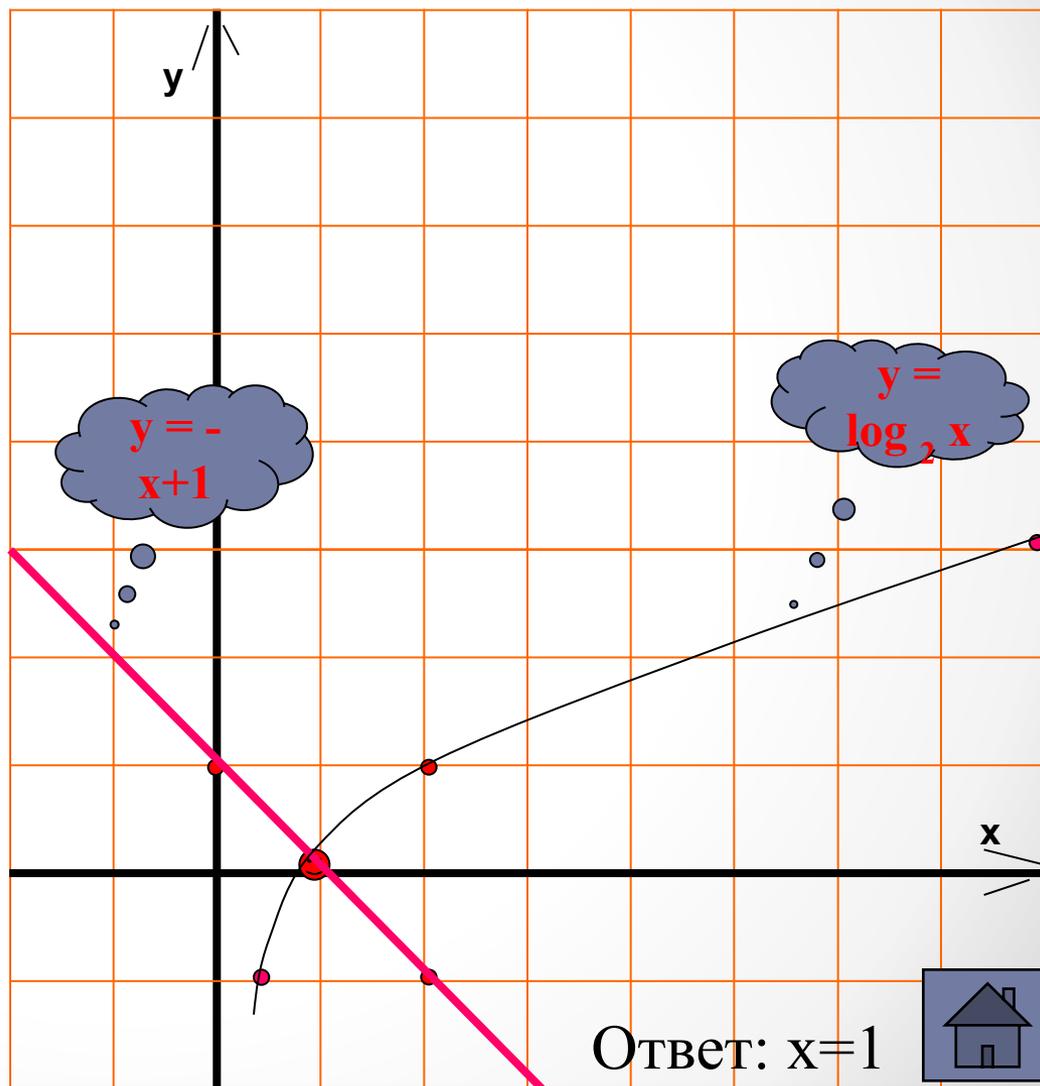
$$y = \log_2 x$$

x	2	1
y	1	0

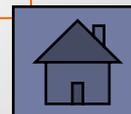
Построим
график уравнения

$$y = -x+1$$

x	2	0
y	-1	1



Ответ: $x=1$



Решите самостоятельно:

$$\log_3\left(\frac{x}{2}-5\right)=0$$

$$\log_2(3-x)=0$$

$$\log_3(5x+3)=\log_3(7x+5)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-1)=\log_{\frac{1}{2}}(6x+8)$$

$$\log_5^2 x - \log_5 x = 2$$

Спасибо за внимание!



Удачи!
Успехов!