Косова Г.Н., доцент кафедры физики и материаловедения

Курс **«Физика»**

Раздел **«Механика»**

Тема **«Динамика вращательного движения ч. 2»**

Динамика вращательного движения

Момент силы.
Момент импульса.
Основной закон динамики вращательного движения.

Момент силы.

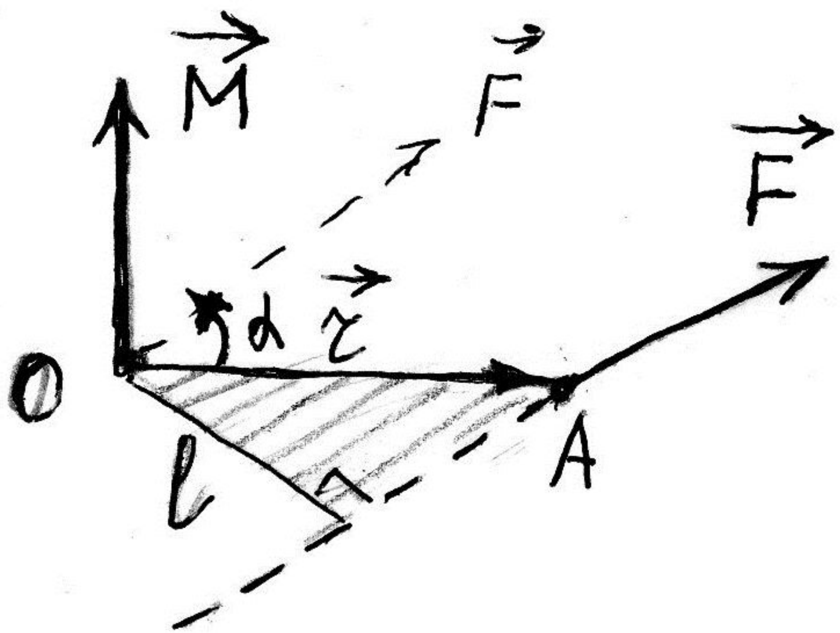
Момент силы относительно точки

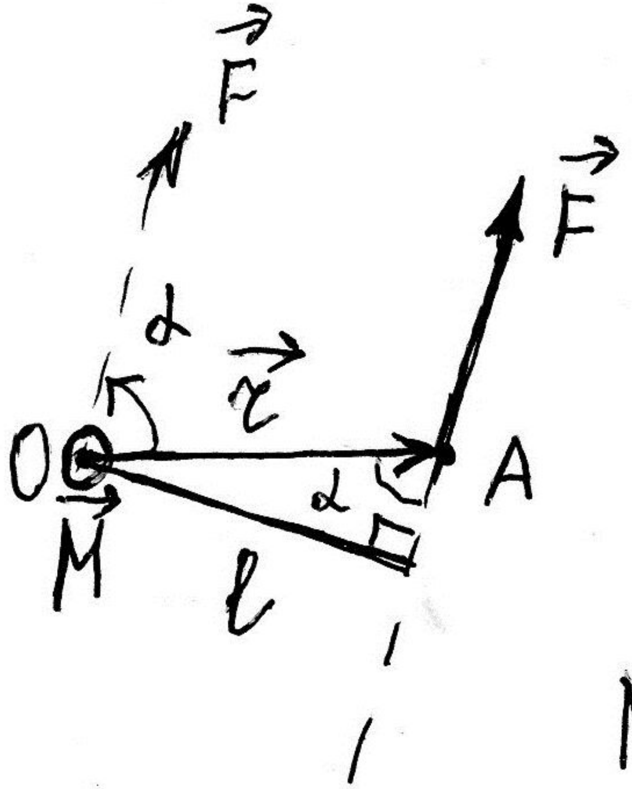
$$\boxed{\vec M = [\vec r, \vec F]};$$

Моментом силы $\vec F$ относительно некоторой т. О наз-ся векторное пр-ие радиуса-вектора, проведённого из т. О в т. приложения силы, на вектор силы.

$|\vec M| = |\vec r| \cdot |\vec F| \cdot \sin\alpha$; Направление по правилу правого винта.

Момент силы





$$l = r \cdot \sin\alpha$$

$$M = F \cdot l$$

Момент силы.

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ F_x & F_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(\underbrace{yF_z - zF_y}_{M_x}) - \vec{j}\,(\underbrace{xF_z - zF_x}_{-M_y}) + \vec{k}\,(\underbrace{xF_y - yF_x}_{M_z})$$

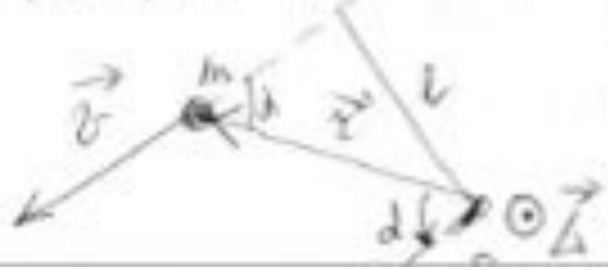
Момент импульса

Момент импульса м.т. относительно точки.

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]}$$

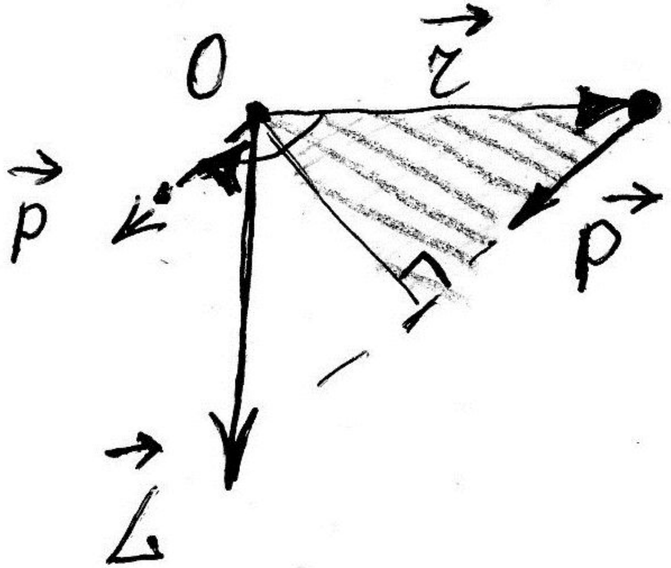
Моментом импульса м.т. относительно некоторой точки т. O называется векторное произведение радиуса-вектора, проведённого из т. O к данной м.т., на вектор импульса

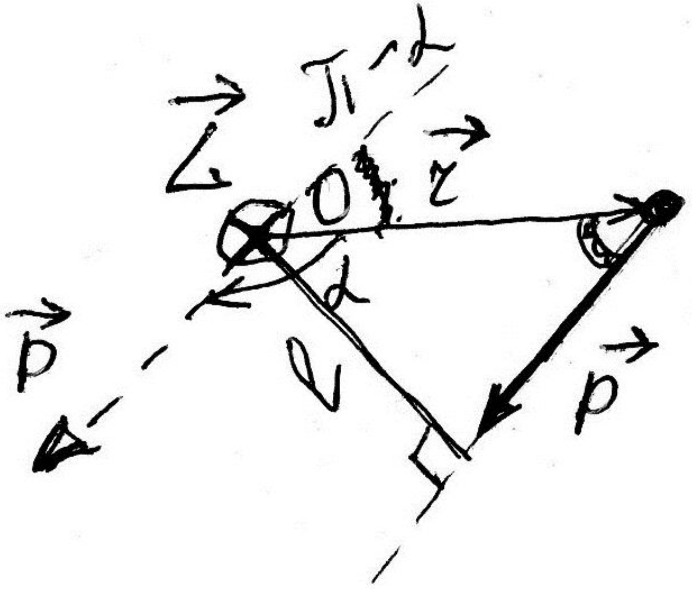
$|\vec{L}| = |\vec{r}|\,|\vec{p}|\cdot\sin\alpha$. Направление по правилу правого винта



$l = r\cdot\sin\alpha$; $L = p\cdot l = m\upsilon l$

Момент импульса.





$$l = r \cdot \sin(\pi - \alpha) = r \cdot \sin\alpha$$

$$L = pl$$

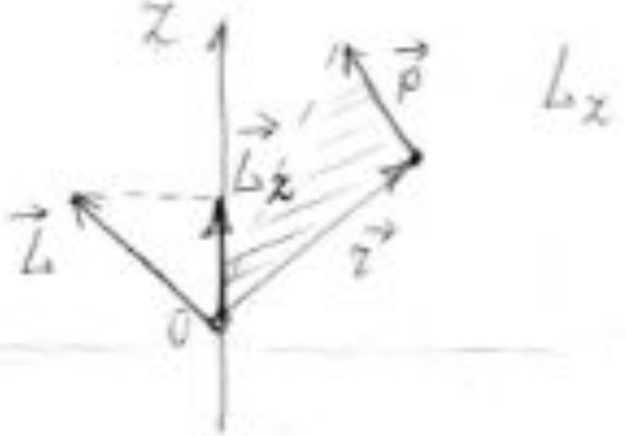
Момент импульса

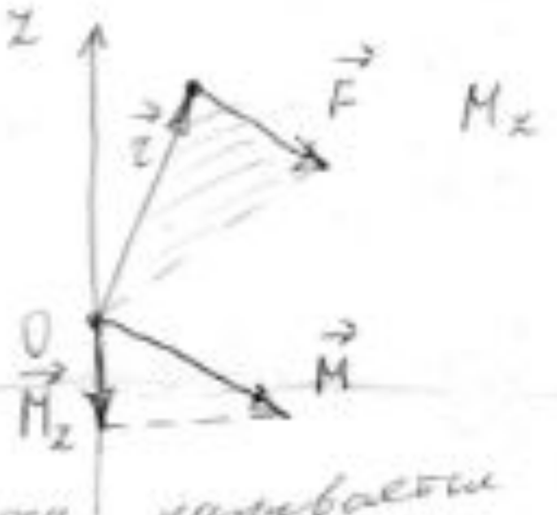
$$\vec{L} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} y & z \\ p_y & p_z \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} x & z \\ p_x & p_z \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(\underbrace{y p_z - z p_y}_{L_x}) - \vec{j}\,(\underbrace{x p_z - z p_x}_{-L_y}) + \vec{k}\,(\underbrace{x p_y - y p_x}_{L_z})$$

Момент силы (импульса) относительно оси.

Моментом импульса относительно оси называет[ся]
проекция на эту ось момента импульса, н[айден-]
ного отн-но любой т., принадлежащей этой ос[и]





Моментом силы относительно оси называется
проекция на эту ось момента силы, найденного
отн-но любой т., принадлежащей этой оси.

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.

Момент импульса системы м.т. относительно т. O

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i \qquad \vec{L}_i = [\vec{r}_i ; \vec{p}_i]$$

Продифференцируем по времени

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}[\vec{r}_i , \vec{p}_i] = \sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{d\vec{r}_i}{dt} , \vec{p}_i\right] + \left[\vec{r}_i , \frac{d\vec{p}_i}{dt}\right.\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left([\vec{v}_i , \vec{p}_i] + [\vec{r}_i , \vec{F}_i^{\text{внеш}}] + [\vec{r}_i ; \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}^{\text{внутр}}]\right);$$

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum^{n} \vec{F}_{ik}^{\text{внутр}} \; ; \quad [\vec{v}_i , m_i \vec{v}_i] = 0 \; ;$$

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.

$$\vec{M}_{ik} = [\vec{r}_i ; \vec{F}_{ik}] ; \vec{M}_{ki} = [\vec{r}_k , \vec{F}_{ki}]$$

$$M_{ik} = |\vec{F}_{ik}| \cdot l_i \ ; \quad M_{ki} = |\vec{F}_{ki}| \cdot l_k$$

$|\vec{F}_{ik}| = |\vec{F}_{ki}|$ — по III з. Н.

$l_i = l_k$ — по опред. плеча силы

$M_{ik} = M_{ki}$; направлены в противоп. стор.

$$\vec{M}_{ik} = -\vec{M}_{ki}$$

$$\sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i ; \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ik}^{\,внутр}] = 0$$

Основной закон динамики вращательного движения относительно точки.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} [\vec{r}_i ; \vec{F}_i^{\,внеш}] = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i^{\,внеш} = \vec{M}^{\,внеш}$$ – главный вектор момента внешних сил

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\,внеш}}$$

Скорость изменения момента импульса системы м.т. относительно некоторой т. O равна суммарному моменту внешних сил относительно этой же точки

В проекциях на оси координат

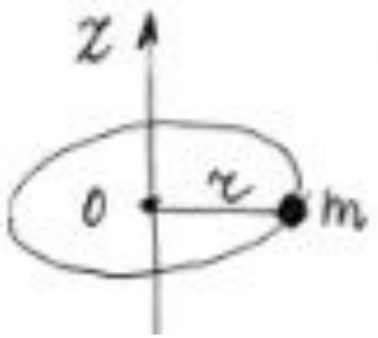
$$\frac{dL_x}{dt} = M_x ; \quad \frac{dL_y}{dt} = M_y ; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z$$

Динамика вращательного движения твердого тела.

Момент инерции.
Момент импульса твердого тела.
Основной закон динамики вращательного движения твердого тела.
Закон сохранения момента импульса.

Момент инерции относительно оси вращения.

- Мера инертности тела к вращательному движению.
- Зависит от распределения массы относительно оси вращения.
- Мо … чки.



$$J = m r^2 \quad [кг \cdot м^2]$$

- Момент ин … иатериальных точек.

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

Момент инерции относительно оси вращения.

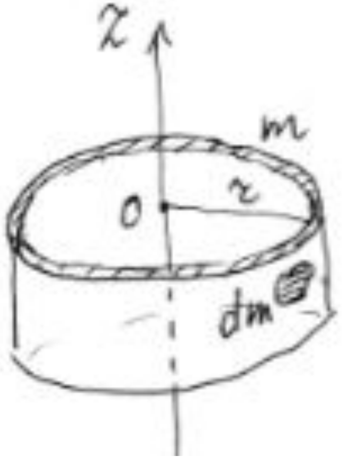
- Момент инерции твердого тела.

$$dJ = r^2 dm$$

$$J = \int_0^m r^2 dm = \int_0^V r^2 \rho \, dV$$

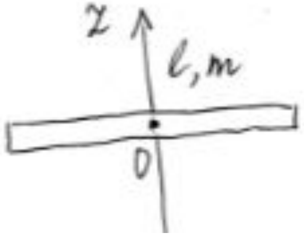
Моменты инерции тел правильной формы.

- Полый тонкостенный цилиндр (обруч)



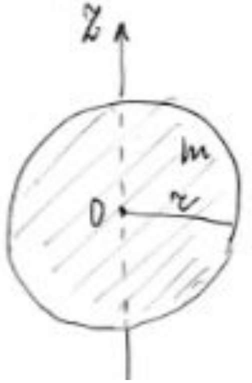
$$J = \int_0^m r^2 dm = r^2 \int_0^m dm = r^2 m$$

- Прямой тонкий стержень



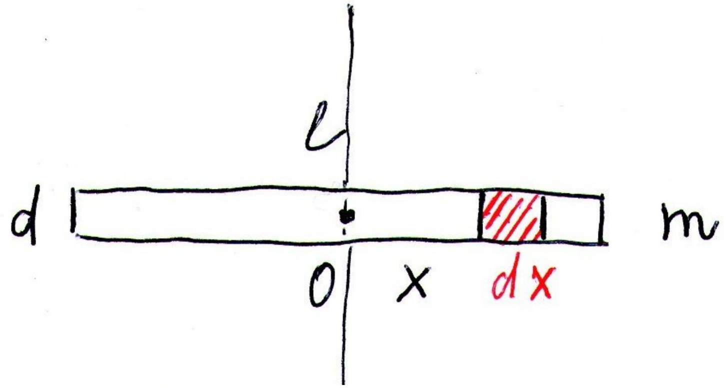
$$J = \frac{1}{12} m l^2$$

- Шар



$$J = \frac{2}{5} m r^2$$

Моменты инерции стержня.



$d \ll l$

$$\tau = \frac{m}{l}\ ; \quad dm = \tau \cdot dx = \frac{m}{l}\,dx$$

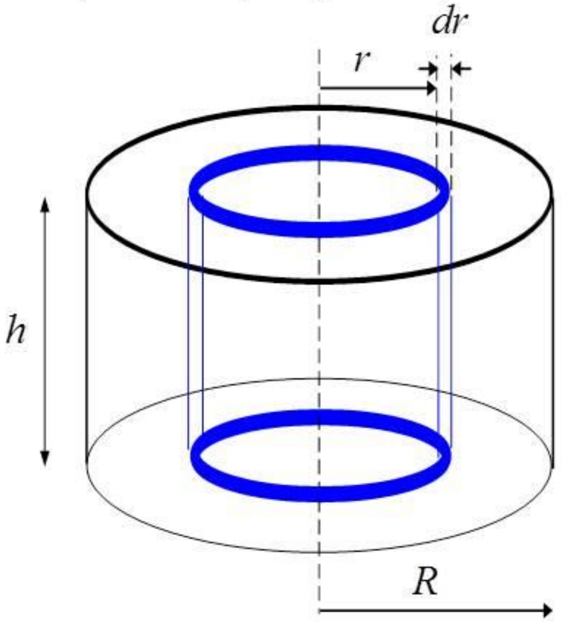
$$dJ = dm\, x^2 = \frac{m}{l}\,dx \cdot x^2$$

$$J = 2\int_0^{l/2} \frac{m}{l}\,x^2\,dx = \frac{2m}{l}\int_0^{l/2} x^2\,dx$$

$$J = \frac{2m}{l} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \frac{\cancel{2}m}{\cancel{l}} \cdot \frac{l^{\cancel{3}\,2}}{3 \cdot \cancel{8}_4} = \frac{ml^2}{12}$$

Момент инерции сплошного цилиндра (диска)

Пример: расчет момента инерции сплошного цилиндра радиуса R, высотой h.



Разобьем на полые цилиндры r, $r + dr$, $dr \to 0$.

$$dr << r \Rightarrow dJ = r^2 dm,$$

dm – масса всего полого цилиндра.

$$dV = 2\pi rhdr \Rightarrow$$

$$dm = 2\pi rh\rho dr \Rightarrow$$

$$dJ = 2\pi h\rho r^3 dr \Rightarrow$$

$$J = \int dJ = 2\pi h\rho\int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\pi hR^4\rho, \left(V = \pi R^2 h\right) \Rightarrow$$

$$dV = \pi(r+dr)^2 \cdot h - \pi r^2 h$$

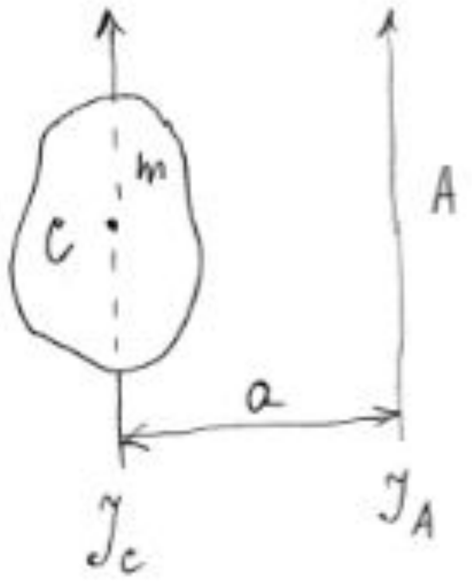
$$dV = (\cancel{\pi r^2} + 2\pi r dr + \underbrace{dr^2}_{\to 0} - \cancel{\pi r^2})h$$

$$dV = 2\pi r dr h$$

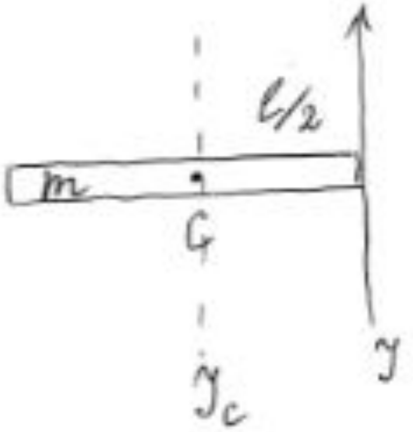
$$m = \rho V = \rho\pi R^2 h$$

$$J = \frac{mR^2}{2}$$

Теорема Штейнера.



$$J_A = J_c + ma^2$$



$$J = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{m \cdot l^2}{4} =$$
$$= \frac{1}{3} m l^2$$

Момент импульса твердого тела.

$$L_{iz} = m_i v_i r_i$$

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} L_{iz} = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i \omega r_i^2 = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$L_z = J_z \omega$$

Основной закон динамики вращательного движения твердого тела.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}; \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z; \quad L_z = J_z\omega$$

$$\frac{d(J_z\omega)}{dt} = M_z; \quad J_z\frac{d\omega}{dt} = M_z$$

$$J_z\varepsilon = M_z; \quad J\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Закон сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}},$$

$$\vec{M}^{\text{внеш}} = 0; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

$$\vec{L} = const$$

Закон сохранения момента импульса

1. Моменты внешних сил компенсируют друг друга.

2. Равен нулю момент внешних сил относительно к-л оси.

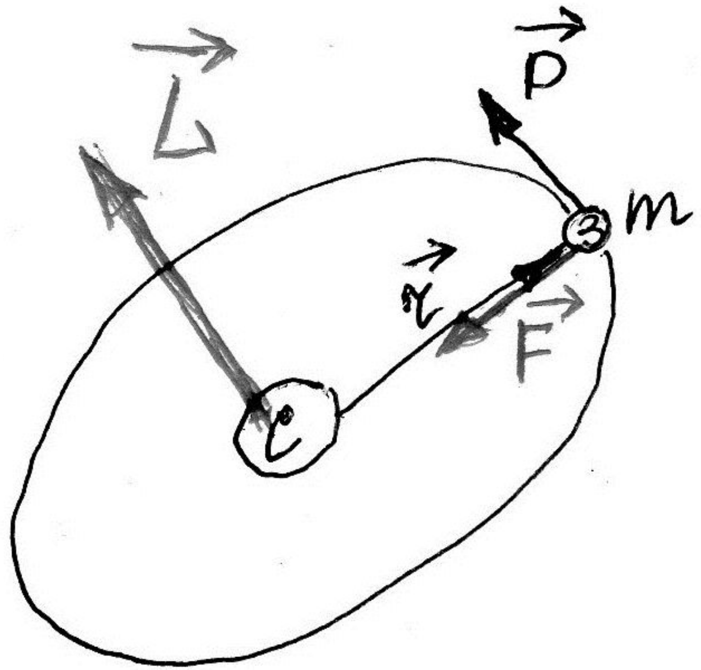
$$M_x = 0 \Rightarrow L_x = const$$

$$M_y = 0 \Rightarrow L_y = const$$

$$M_x = 0 \Rightarrow L_z = const$$

3. Моментом внешних сил можно пренебречь

ЗСМИ. Примеры.



$$M = r \cdot F \cdot \sin 180^\circ = 0$$

$\vec{L} = const$ и по величине
и по направлению

ЗСМИ. Примеры.

$$L_z = J_z \omega_z$$

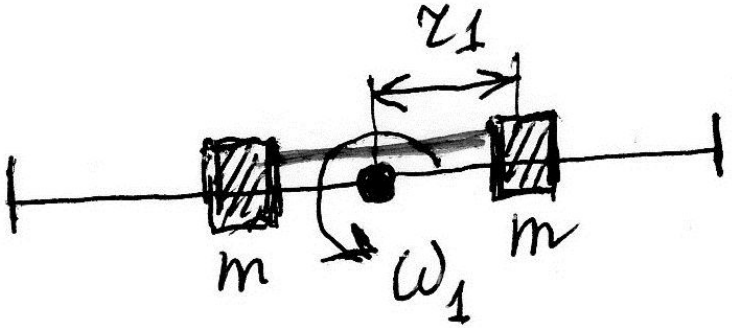
$$M_z = 0 \Rightarrow L_z = const$$

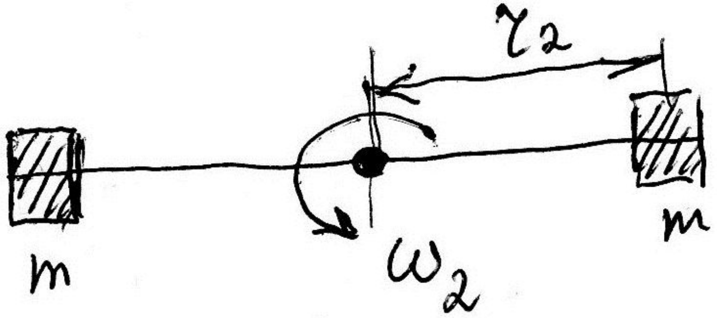
$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{J_1}{J_2}$$

ЗСМИ. Примеры.

$$L_1 = 2m r_1^2 \omega_1$$





$$L_2 = 2m r_2^2 \omega_2$$

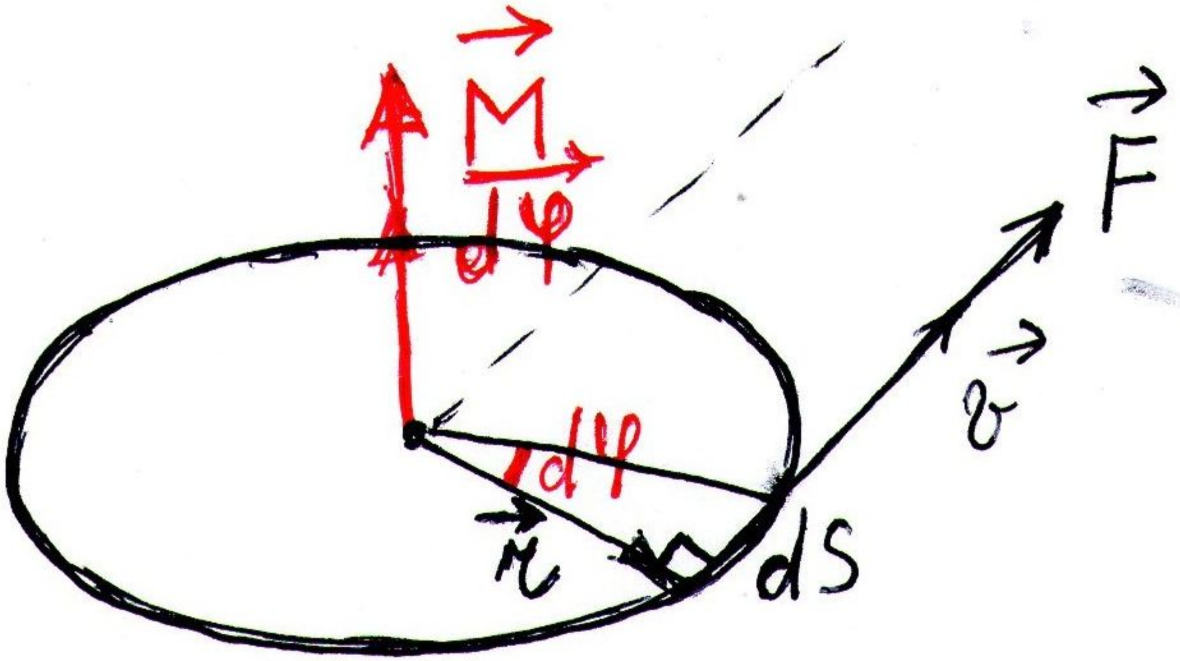
$$2m r_1^2 \omega_1 = 2m r_2^2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Работа. Кинетическая энергия вращательного движения.

Работа.
Мощность.
Кинетическая энергия вращательного движения.
Кинетическая энергия при сложном движении.

Работа вращательного движения.



$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha$$

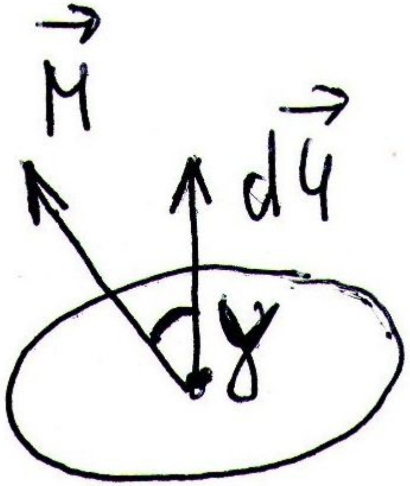
$$dr = dS; \quad \alpha = 0^\circ; \quad \cos 0^\circ = 1$$

$$dA = F \cdot dS; \quad dS = r\, d\varphi$$

$$dA = F \cdot r \cdot d\varphi; \quad F \cdot r = F \cdot r \cdot \sin 90^\circ$$

$$F \cdot r \cdot \sin 90^\circ = M; \quad dA = M \cdot d\varphi;$$

Работа вращательного движения.



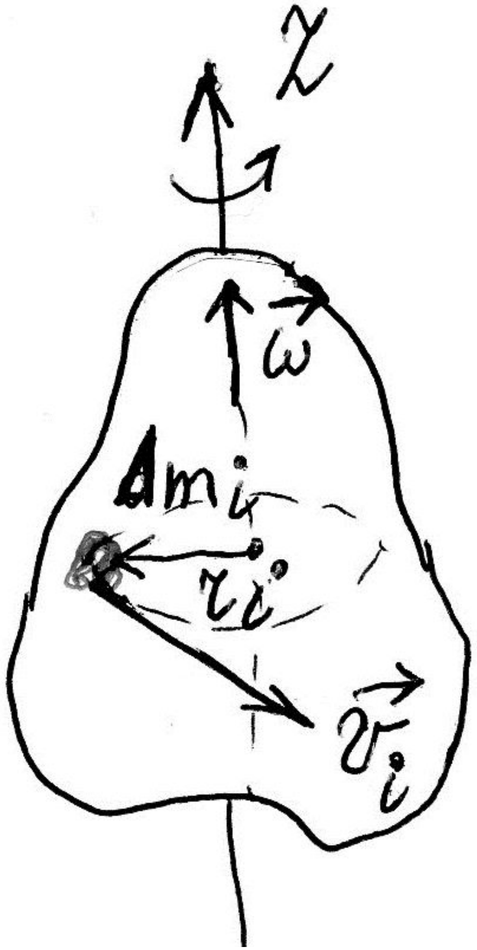
$$dA = M \cdot d\varphi \cdot \cos\gamma$$

$$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$$

Мощность вращательного движения.

-
- $N = \frac{dA}{dt} = \frac{Md\varphi}{dt} = M\omega$
- $N = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Кинетическая энергия вращательного движения.



$$W_{ki} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} W_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$

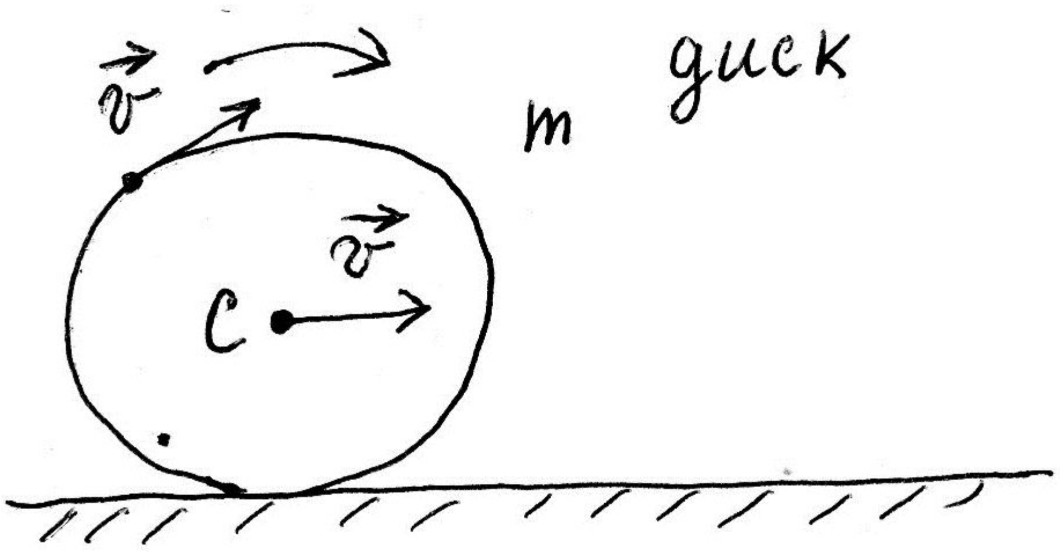
$$v_i = \omega r_i$$

Кинетическая энергия вращательного движения.

$$W_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i \cdot \omega^2 \cdot r_i^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2}_{J_z}$$

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия сложного движения.



$$W_к = W_к^{пост} + W_к^{вр}$$

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$$

Кинетическая энергия сложного движения.

$$v = \omega R; \quad \omega = \frac{v}{R}; \quad J = \frac{mR^2}{2}$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{m\cancel{R^2}v^2}{2 \cdot 2\cancel{R^2}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} =$$

$$W_k = \frac{3}{4}mv^2$$

Аналогия в динамике поступательного и вращательного движения.

Поступательное	Вращательное
Дина	мика
m	J
$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
$\vec{F}$	$\vec{M}$
$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
$\vec{F}^{вн} = 0 \Rightarrow \vec{p} = const$	$\vec{M}^{вн} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$
$W_к = \dfrac{mv^2}{2}$	$W_к = \dfrac{J\omega^2}{2}$
$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$dA = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
$N = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$\vec{N} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$

Спасибо за внимание!

Желаю удачи!