

14.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

1

$$y = e^x$$

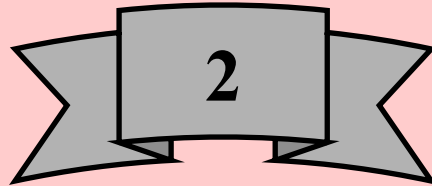
$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = e^0 = 1$$

**Подставляем найденные величины в ряд
Маклорена:**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$



$$y = \sin x$$

$$f(x) = \sin x$$

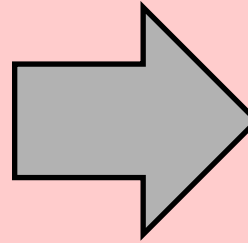
$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

.....



$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

.....

Производные четного порядка все равны нулю:

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

Производные нечетного порядка равны:

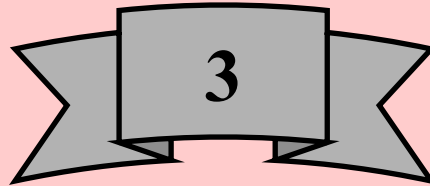
$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

**Подставляем найденные величины в ряд
Маклорена:**

$$\begin{aligned}\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$



$$y = \cos x$$

$$f(x) = \cos x$$

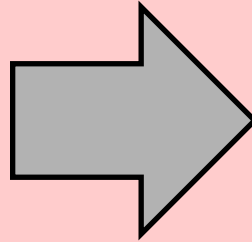
$$f'(x) = -\sin x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \sin x$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x$$

.....



$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

.....

Производные нечетного порядка все равны нулю:

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Производные четного порядка равны:

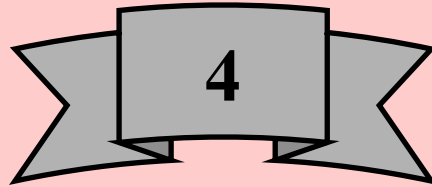
$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$

**Подставляем найденные величины в ряд
Маклорена:**

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$



$$y = (1 + x)^m$$

$$f(x) = (1 + x)^m$$

$$f'(x) = m \cdot (1 + x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m \cdot (m - 1) \cdot (1 + x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot (1 + x)^{m-3}$$

.....

$$f^{(n)}(x) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)(1 + x)^{m-n}$$

Следовательно:

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = m$$

$$f''(0) = m \cdot (m - 1)$$

$$f'''(0) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2)$$

.....

$$f^{(n)}(0) = m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)$$

**Подставляем найденные величины в ряд
Маклорена:**

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot x^3 + \\ + \dots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n + \dots$$

Интервал сходимости ряда $(-1;1)$

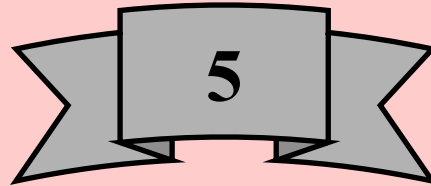
Этот ряд называется *биномиальным*.

Если число m – целое и положительное, то биномиальный ряд представляет собой формулу бинома Ньютона, т.к. при

$$n=m+1$$

$$m-n+1=0$$

следовательно n -ый и все последующие члены ряда будут равны нулю, т.е. ряд обрывается и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.



$$y = \ln(1 + x)$$

$$f(x) = \ln(1+x)$$

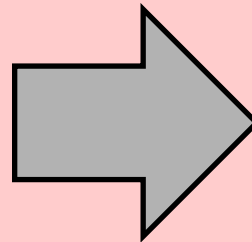
$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4}$$

.....



$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(0) = -6$$

.....

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}\end{aligned}$$

Область сходимости ряда $(-1;1]$

ПРИМЕР.

Разложить в ряд функцию

$$y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$$

РЕШЕНИЕ.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

$$1 - e^{-x^2} = x^2 - \frac{x^4}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

$$\frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{n!} + \dots$$