14.4. РАЗЛОЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД МАКЛОРЕНА

1

$$y = e^x$$

$$f(x) = f'(x) = f''(x) = \ldots = f^{(n)}(x) = e^{x}$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = e^{0} = 1$$

Подставляем найденные величины в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$

2

$$y = \sin x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$\cdots\cdots$$

$$\Longrightarrow$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(0) = 0$$

$$\cdots\cdots$$

Производные четного порядка все равны нулю:

$$f^{(2n)}(0) = 0$$

Производные нечетного порядка равны:

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

где $n = 0,1,2...$

Подставляем найденные величины в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$

3

$$y = \cos x$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & \qquad f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin x & \qquad f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos x & \qquad f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \sin x & \Longrightarrow \qquad f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & \qquad f^{(4)}(0) &= 1 \\
&\cdots\cdots & &\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Производные нечетного порядка все равны нулю:

$$f^{(2n+1)}(0) = 0$$

Производные четного порядка равны:

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n$$

где $n = 0,1,2...$

Подставляем найденные величины в ряд Маклорена:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Область сходимости ряда $(-\infty; +\infty)$

4

$$y = (1 + x)^m$$

$$f(x)=(1+x)^m$$

$$f'(x)=m\cdot(1+x)^{m-1}$$

$$f''(x)=m\cdot(m-1)\cdot(1+x)^{m-2}$$

$$f'''(x)=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(1+x)^{m-3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

Следовательно:

$$f(0)=1$$

$$f'(0)=m$$

$$f''(0)=m\cdot(m-1)$$

$$f'''(0)=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)$$

$$\ldots\ldots$$

$$f^{(n)}(0)=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)$$

Подставляем найденные величины в ряд Маклорена:

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!} \cdot x^3 + $$

$$+ \ldots + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}{n!} \cdot x^n + \ldots$$

Интервал сходимости ряда $(-1;1)$

Этот ряд называется *биномиальным*.

Если число *m* – целое и положительное, то биномиальный ряд представляет собой формулу бинома Ньютона, т.к. при

$$n=m+1$$

$$m-n+1=0$$

следовательно *n*-ый и все последующие члены ряда будут равны нулю, т.е. ряд обрывается и вместо бесконечного разложения получается конечная сумма.

5

$$y = \ln(1 + x)$$

$$f(x)=\ln(1+x)$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{6}{(1+x)^4}$$

……

$$\Rightarrow$$

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=1$$

$$f''(0)=-1$$

$$f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(0)=-6$$

……

$$f^{(n)}(0)=\frac{(-1)^n}{n+1}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Область сходимости ряда $(-1;1]$

ПРИМЕР.

Разложить в ряд функцию

$$y = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$$

РЕШЕНИЕ.

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots+\frac{x^{n}}{n!}+\ldots$$

$$e^{-x^{2}}=1-x^{2}+\frac{x^{4}}{2!}-\ldots+(-1)^{n}\cdot\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

$$1-e^{-x^{2}}=x^{2}-\frac{x^{4}}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots$$

$$\frac{1-e^{-x^{2}}}{x^{2}}=1-\frac{x^{2}}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-2}}{n!}+\ldots$$