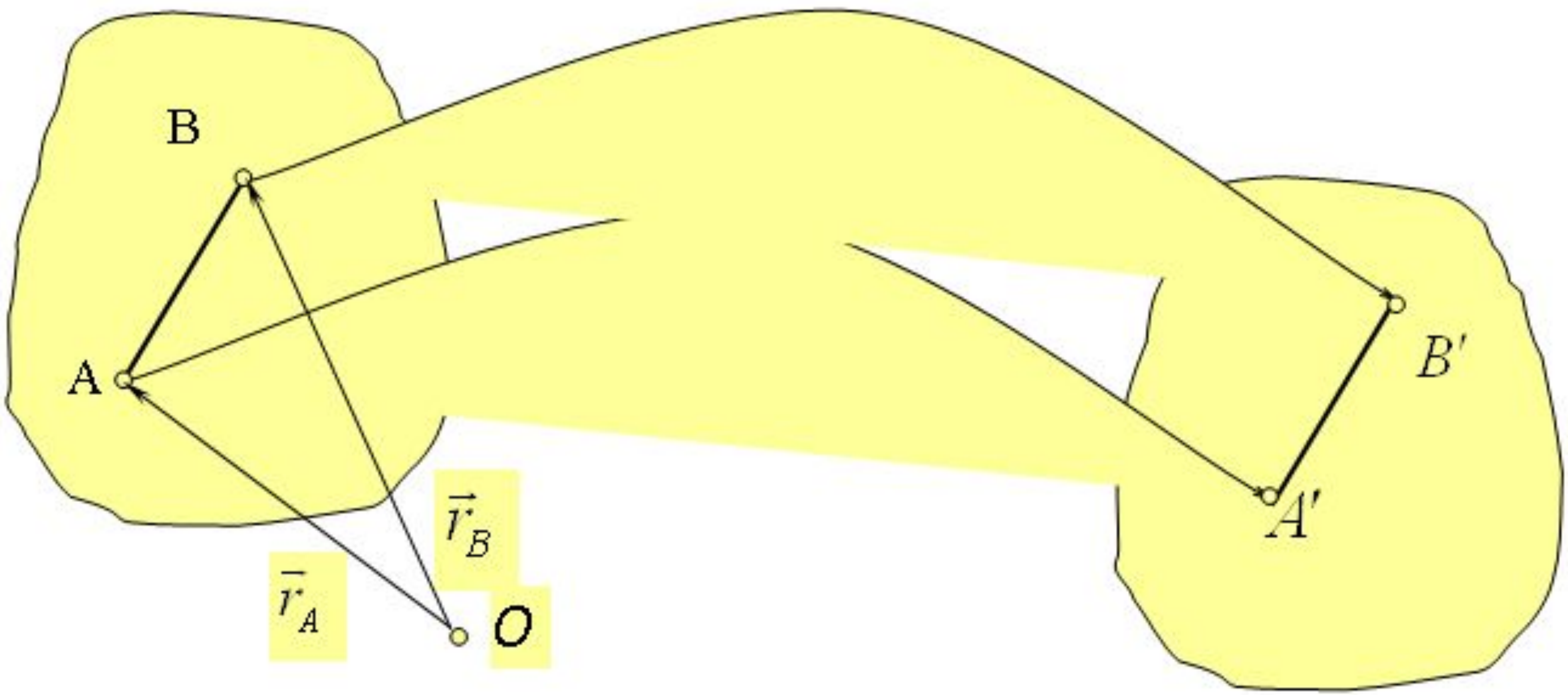
ПРОСТЕЙШИЕ ВИДЫ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Поступательное движения твердого тела

Поступательным называется движение твердого тела, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельной своему начальному положению: AB|| $A'B'$


B
A
B'
A'
$\vec{r}_B$
$\vec{r}_A$
O

Теорема. ***При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения точек тела одинаковы.***

Доказательство. В любой момент движения выполняется равенство (рис. 8.1):

$$\vec{r}_B(t) = \vec{r}_A(t) + \overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} = \text{const}$$

Откуда следует одинаковость траекторий. Дифференцируя это равенство по времени дважды, установим равенство скоростей и ускорений:

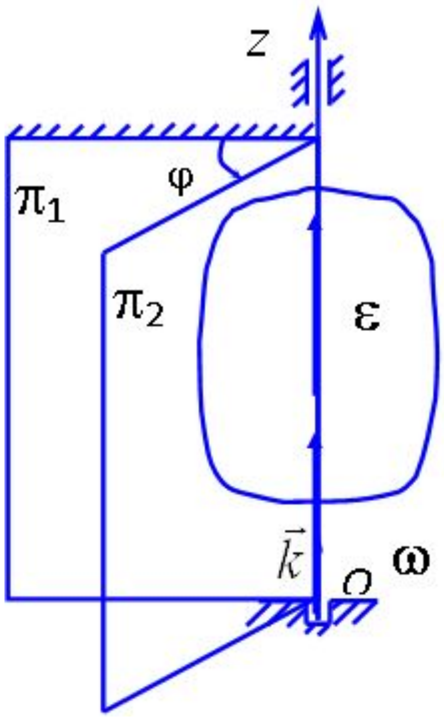
$$\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \frac{d\vec{r}_B}{dt} \qquad \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2}$$

Для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек:

$$\{x_A = x_A(t), y_A = y_A(t), z_A = z_A(t);\}$$

– уравнения поступательного движения твердого тела.

Вращательное движения твердого тела



Вращательным называется движение твердого тела, имеющего две неподвижные точки. Прямая, проходящая через эти точки, называется **осью вращения**. Положение тела определено, если задан угол

$$\varphi$$

межу плоскостями π_1 , π_2
одна из которых π_1 неподвижна,

а другая π_2 жестко связана с телом

.

Для задания вращательного движения необходим закон изменения угла с указанием положительного направления отсчета.

$$\varphi = \varphi(t)$$

-уравнение вращательного движения твердого тела.

С положительным направлением отсчета угла связывают положительное направление оси вращения Oz . Она направлена в ту сторону, откуда положительный отсчет угла φ виден происходящим против хода часовой стрелки.

Для характеристики изменения угла поворота вводится величина, которая называется **угловой скоростью** (обозначается ω_z)

− алгебраическая угловая скорость.

Она определяется как предел средней угловой скорости

.

$$\omega_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}$$

Вектор угловой скорости – это вектор, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки, с модулем

$$\omega = |\vec{\omega}|,$$

равным модулю алгебраической угловой скорости

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{k}$$

$\vec{k}$ – единичный вектор оси вращения.

Угловое ускорение − мера изменения угловой скорости (обозначается ε_z).

Она определяется как предел среднего углового ускорения

$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega_z}{\Delta t} = \dot{\omega}_z = \ddot{\varphi}$$

− алгебраическое угловое ускорение.

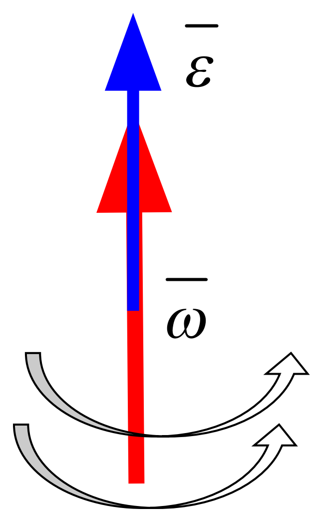
Вектор углового ускорения – производная вектора угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\vec{k}) = \ddot{\varphi}\vec{k}$$

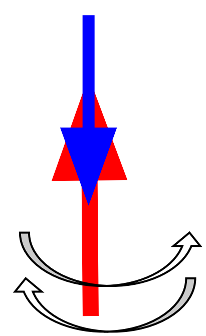
Если вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости, то вращение тела ускоренное

Характер вращательного движения

Вращение __ускоренное__	Численная величина угловой скорости возрастает $$\frac{d\omega}{dt} \succ 0$$	Знаки проекций векторов угловой скорости и ускорения на ось вращения совпадают $\dot{\varphi} \succ 0; \ddot{\varphi} \succ 0;$ или $\dot{\varphi} \prec 0; \ddot{\varphi} \prec 0;$



Вращение **<u>замедленное</u>**	**Численная величина угловой скорости уменьшается** $$\frac{d\omega}{dt} \prec 0$$	**Знаки проекций векторов угловой скорости и ускорения на ось вращения <u>НЕ совпадают</u>** $\dot{\varphi} \succ 0; \ddot{\varphi} \succ 0;$ **или** $\dot{\varphi} \prec 0; \ddot{\varphi} \prec 0;$



Вращение <u>равномерное</u>	**Численная величина угловой скорости не изменяется**	$\omega = const$

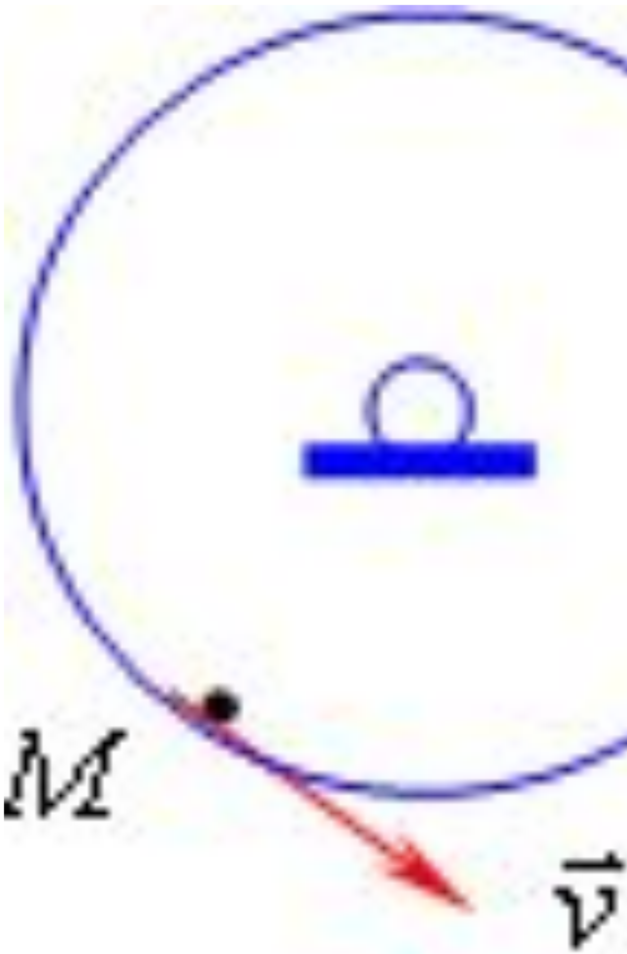
Определение скоростей и ускорений точек вращающегося тела

Так как траектории точек вращающегося тела − окружности (с радиусом R), то при определении их скоростей и ускорений удобно воспользоваться естественным способом задания движения. Дуговая координата, определяющая положение точки на траектории, связана с углом поворота равенством: $s = \varphi R$

Откуда: $v_\tau = \dot{s} = \dot{\varphi} R = \omega_z R$ $\quad v_\tau = \omega_z R$

Численная величина $v = \omega R$

.



M
$\vec{v}$

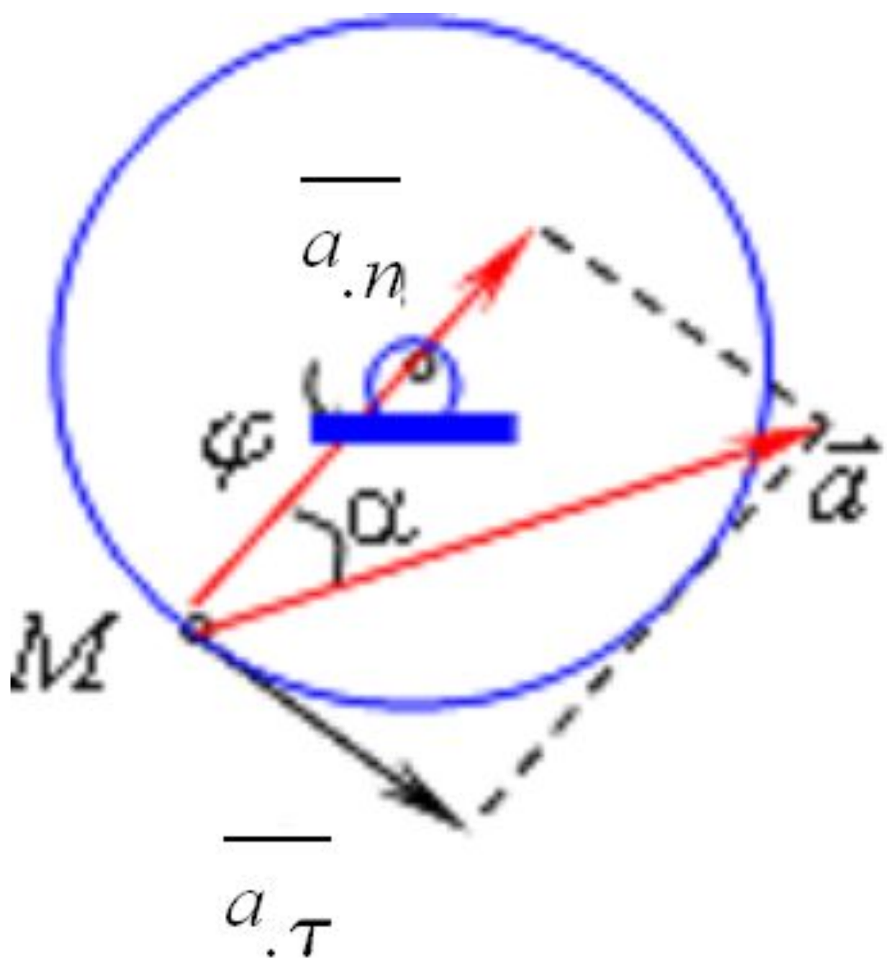
Ускорение определяем как сумму : $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\dot{\varphi}^2 R^2}{R} = \omega^2 R \qquad a_n = \omega^2 R$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \ddot{\varphi} R = \varepsilon_z R \qquad a_\tau = \varepsilon_z R$$

Модуль ускорения точки вращающегося тела определяется равенством:

$$a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$



$\overline{a}_{.n}$
φ
α
$\vec{a}$
M
$\overline{a}_{.\tau}$

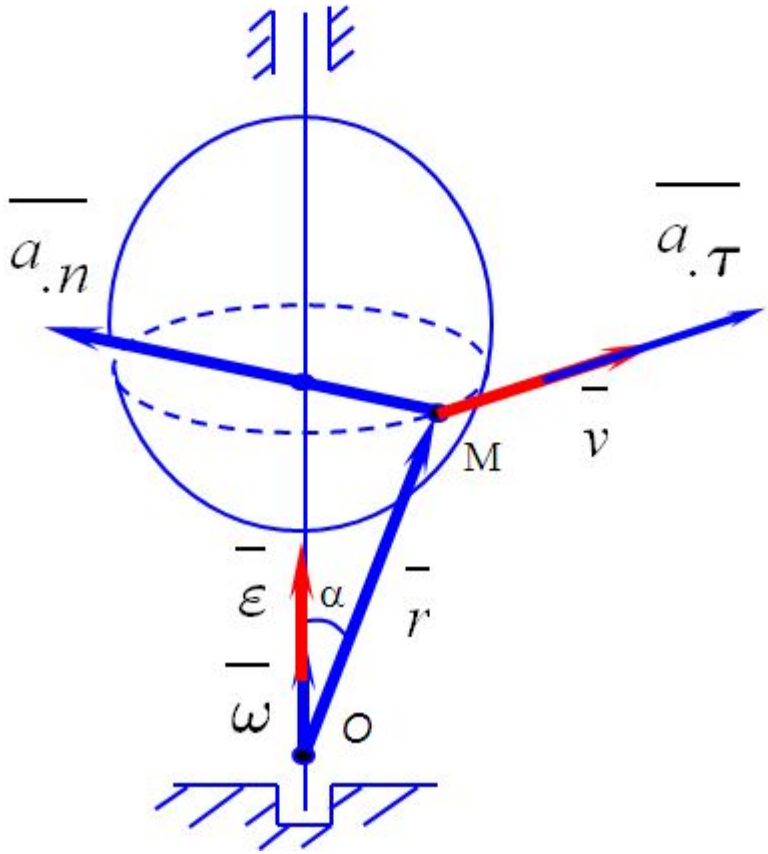
Направление ускорения точки вращающегося тела определяется соотношениями:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|a_\tau|}{a_n} = \frac{|\varepsilon_z R|}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

Касательное и нормальное ускорения при вращательном движении твердого тела называют также **вращательным** и **осестремительным**:

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}^{\text{вр}}$$

$$\vec{a}_n = \vec{a}^{\text{ос}}$$



$\bar{a}_{.n}$
$\bar{a}_{.\tau}$
$\bar{v}$
M
$\bar{\varepsilon}$
α
$\bar{r}$
$\bar{\omega}$
O

Модуль скорости точки вращающегося тела

$$v = \omega R = \omega r \sin\alpha$$

равен модулю векторного произведения

$$\vec{\omega} \times \vec{r}$$

Направление скорости совпадает с направлением векторного произведения. Следовательно,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

− формула Эйлера

Для получения векторных формул для ускорений точек вращающегося тела продифференцируем формулу Эйлера по времени

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Воспользовавшись определением векторного произведения, нетрудно убедиться в том, что первое слагаемое − вращательное,

а второе − осестремительное ускорения:

$$\vec{a}^{\,вр} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \quad \vec{a}^{\,ос} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$