Численные методы

Решение нелинейных уравнений

Метод дихотомии

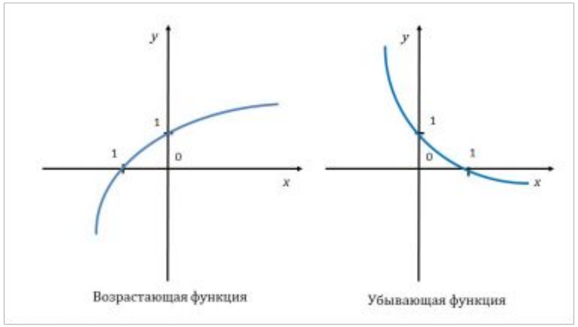
Метод хорд

Метод касательных

Отделение корней

Корень ξ уравнения f(x)=0 считается **отделённым**
на отрезке [a; b], если на этом отрезке нет других корней.
Отделить корни - разбить всю О.Д.З. на отрезки,
в каждом из которых содержится 1 корень.

<u>Теорема:</u>
Если функция f(x) непрерывна на [a; b] и принимает на концах отрезка значения разных знаков, а производная f'(x) сохраняет постоянный знак внутри отрезка, то внутри [a; b] содержится корень уравнения f(x)=0, и этот корень единственный.



Отделение корней

План отделения корней:

1) Найти f'(x)

2) Составить таблицу знаков f(x). Для x берём значения: критические точки (или близкие к ним), граничные значения (исходя из О.Д.З.)

3) Определяем интервалы (противоположные значения f(x))

<u>Пример:</u>

Отделить аналитически корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

1) D(f) = R

$f'(x) = 3x^2 + 6x$; $3x^2 + 6x = 0$; $3x(x + 2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -2$

2) Таблица знаков f(x)

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
Sign f(x)	-	+	-	+		

$x_1 \in (-\infty; -2)$ $x_2 \in (-2; 0)$ $x_3 \in (0; +\infty)$

Отделение корней

<u>Пример:</u>

Отделить аналитически корни уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

x	-∞	-2	0	+∞		
Sign f(x)	-	+	-	+		

$x_1 \in (-\infty; -2)$ $x_2 \in (-2; 0)$ $x_3 \in (0; +\infty)$

x	-3	-2	-1	0	1	
Sign f(x)	-	+	-	-	+	

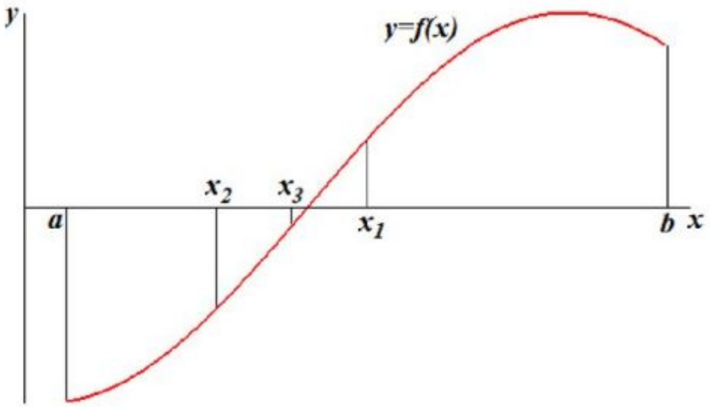
3) Определим интервалы

$x_1 \in (-3; -2)$ $x_2 \in (-2; -1)$ $x_3 \in (0; 1)$ - отделили интервалы

Уточнение корней. Метод дихотомии

Метод половинного деления

В основе этого метода лежит свойство непрерывных функций, заключающееся в том, что если функция *f(x)* на концах отрезка [*a*,*b*] принимает значения разных знаков, т.е. *f(a)·f(b)<0*, то внутри этого отрезка содержится по меньшей мере один корень уравнения *f(x) = 0*.



Уточнение корней. Метод дихотомии

Уточнение корней — доведение их до заданной степени точности ε.

Пусть **ξ** — корень уравнения f(x)=0 отделён и находится на отрезке [a; b], то есть f(a)·f(b)<0.
Пусть **ε** — точность измерений.
1) Если **b-a** ≤ **ε**, то необходимая точность достигнута. За приближённое значение **ξ** можно взять любое значение из [a; b]. Обычно берут $\frac{b-a}{2}$.

2) Если **b-a** > **ε**, то [a; b] делят пополам $c=\frac{a+b}{2}$. Происходит деление отрезка [a; b] на [a; c] и [c; b]. Выбираем тот на концах которого функция принимает противоположные значения. Обозначим его [a_1; b_1]. И так далее.

Делаем до тех пор, пока $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}$ ≤ ε.

<u>Замечание:</u>
Редко, но бывает, что **f(c)=0**, то есть **c**- точный корень уравнения f(x)=0

Уточнение корней. Метод дихотомии

Пример:

Методом дихотомии уточнить до 10^{-2} меньший корень уравнения

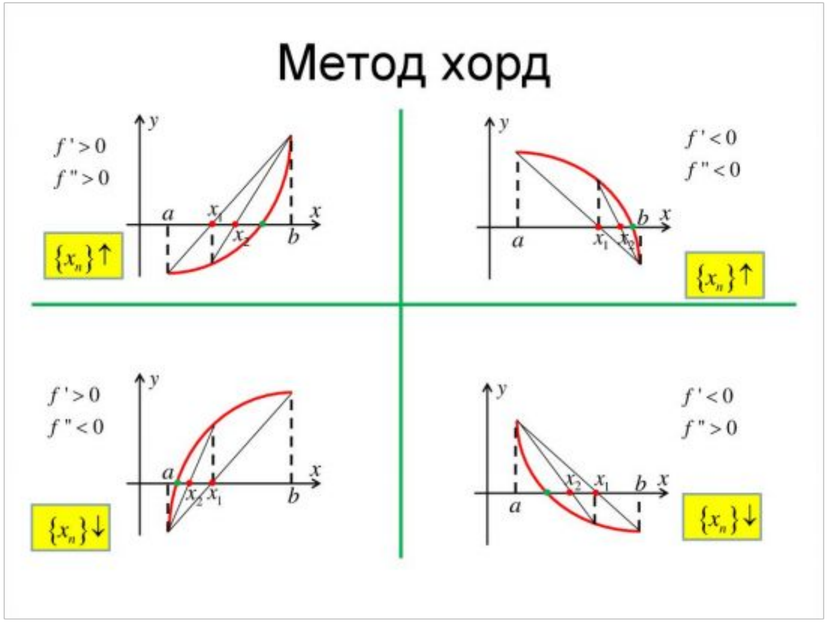
$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

Решение: $x_1 \in (-3; -2)$

n	a_n^{-0}	$f(a_n)$	b_n^{+0}	$f(b_n)$	$X_n=(a_n + b_n)/2$	$f(x_n)$
0	-3	-3	-2	1	-2,500	0,125
1	-3	-3	-2,500	0,125	-2,750	-1,111
2	-2,750	-1,111	-2,500	0,125	-2,625	-0,320
3	-2,625	-0,320	-2,500	0,125	-2,563	-0,139
4	-2,563	-0,139	-2,500	0,125	-2,532	0,003
5	-2,563	-0,139	-2,532	0,003	-2,548	-0,071
6	-2,548	-0,071	-2,532	0,003	-2,540	-0,034
7	-2,540	-0,034	-2,532	0,003	-2,536	-0,014
8	-2,536	-0,014	-2,532	0,003	-2,534	-0,007

Ответ: $x_1 = -2,53$

Уточнение корней. Метод хорд



Пусть корень уравнения **f(x)=0** отделён на отрезке **[a;b]**.
Пусть **f’(x)**, **f”(x)** — непрерывны на **[a;b]**.
Пусть **f(a)·f(b)<0**.
Смысл: дуга кривой **y=f(x)** заменяется на хорду.

Уточнение корней. Метод хорд

Правила:
Неподвижным концом отрезка является тот, для которого знак функции f(x) совпадает со знаком второй производной f''(x).

1) Если **f(b)·f''(b) > 0**, то неподвижна граница **b** (верхние случаи).
Для нахождения приближения **ξ** используем формулы:

$$x_1 = a - \frac{f(a)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(b-x_n)}{f(b)-f(x_n)}$$

2) Если **f(a)·f''(a) > 0**, то неподвижна граница **a** (нижние случаи).
Для нахождения приближения **ξ** используем формулы:

$$x_1 = b - \frac{f(b)\cdot(b-a)}{f(b)-f(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n-a)}{f(x_n)-f(a)}$$

Уточнение корней. Метод хорд

Пример: методом хорд уточнить до 10^{-2} меньший корень уравнения $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

Решение: $x_1 \in (-3; -2)$ $f(-3) = -3 < 0$ $f(-2) = 1 > 0$

$f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f'(x) > 0$ на интервале (-3; -2)

$f''(x) = 6x + 6$, $f''(x) < 0$ на интервале (-3; -2)

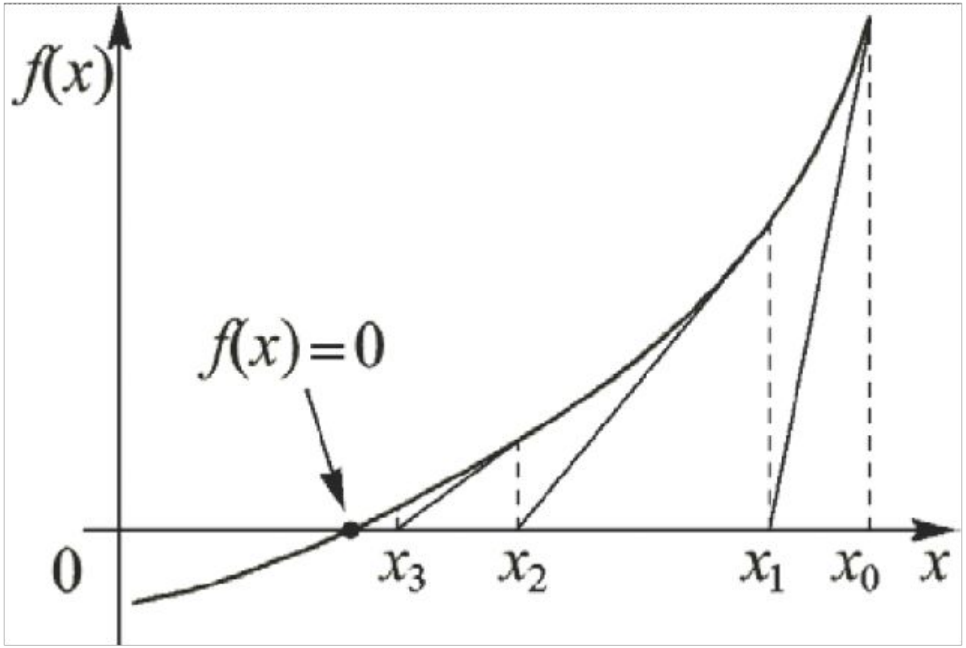
Неподвижный корень a = -3, значит применяем формулы (2)

n	$\mathbf{x_n}$	$\mathbf{f(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n+3)}{f(x_n)+3}$
0	-2	1	-2,25
1	-2,25	0,7969	-2,4442
2	-2,4442	0,3204	-2,4978
3	-2,4978	0,1332	-2,5191
4	-2,5191	0,0517	-2,5272
5	-2,5272	0,0196	-2,5303
6	-2,5303	0,0130	-2,5323

Ответ: $x_1 = -2,53$

Уточнение корней. Метод касательных

Пусть корень уравнения **f(x)=0** отделён на отрезке **[a;b]**.
Пусть **f’(x)**, **f”(x)** — непрерывны на **[a;b]**.
Пусть **f(a)·f(b)<0**.
Смысл: дуга кривой **y=f(x)** заменяется касательной к этой кривой.



Уточнение корней. Метод касательных

Правило:
За исходную точку следует выбрать тот конец отрезка **[a;b]**, в котором знак функции **f(x)** совпадает со знаком второй производной **f''(x)**

1) Если **f(b)·f''(b) > 0**, значит **b=x$_0$** , используем формулы:

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2) Если **f(a)·f''(a) > 0**, значит **a=x$_0$** , используем формулы:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Уточнение корней. Метод касательных

Пример: методом касательных уточнить до 10^{-2} меньший корень уравнения
$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$

Решение: $x_1 \in (-3; -2)$ f(-3) = -3 < 0 f(-2) = 1 > 0
$f'(x) = 3x^2 + 6x$, $f'(x) > 0$ на интервале (-3; -2)
$f''(x) = 6x + 6$, $f''(x) < 0$ на интервале (-3; -2)
$x_0 = a = -3$, применяем формулы (2)

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	-3	-3	9	-2,6667
1	-2,6667	-0,6298	5,3337	-2,5486
2	-2,5486	-0,0680	4,1945	-2,5324
3	-2,5324	-0,0013	4,0447	-2,5321

Ответ: $x_1 = -2,53$

Объявления

- **Практические работы в СДО**
- 1) Погрешности
- 2) Точные методы решения СЛУ
- 3) Метод итераций. Метод Зейделя
- 4) Решение нелинейных уравнений методом хорд и касательных
- **Спасибо за внимание**