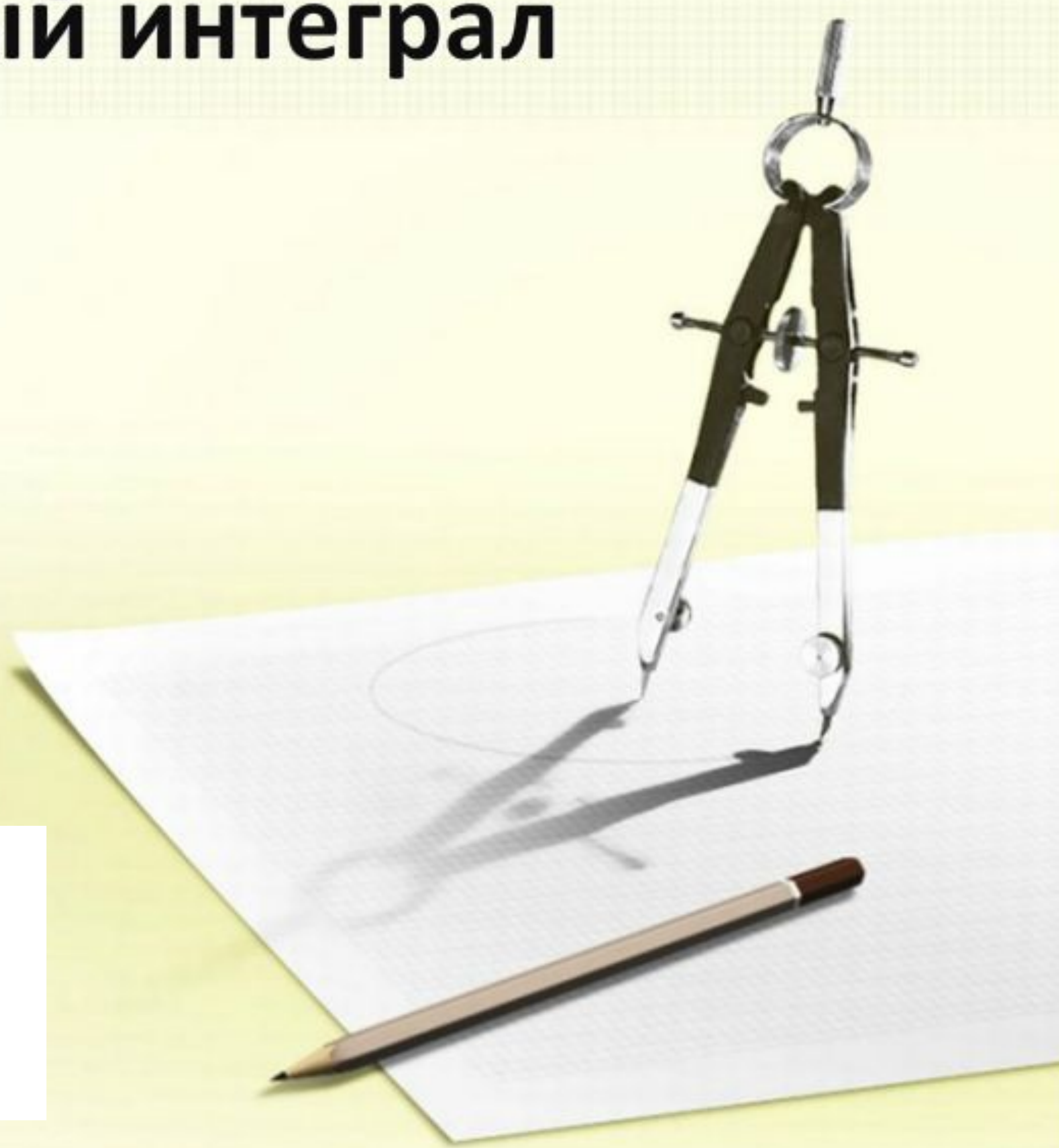
Определенный интеграл



Решите:

- **Вариант 1**

$$1.\int(\mathbf{2}x+e^{x})dx$$

$$2.\int(\mathbf{3}-\mathbf{4}x)^{\mathbf{6}}dx$$

$$3.\int\cos\mathbf{4}x\,dx$$

$$4.\int e^{\mathbf{2}x}dx$$

- **Вариант 2**

$$1.\int(\mathbf{3}-\mathbf{5}x)dx$$

$$2.\int\sin\mathbf{3}x\,dx$$

$$3.\int(\mathbf{2}x+\mathbf{6})^{\mathbf{4}}dx$$

$$4.\int\frac{\mathbf{2}dx}{\mathbf{3}x}$$

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то справедлива формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Такую формулу называют **формулой Ньютона-Лейбница**.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Основные свойства определенного интеграла

Свойство 1

Если c – постоянное число и функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b], то

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Свойство 2

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ интегрируемы на отрезке [a,b], то интегрируема на этом отрезке их сумма

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

Это свойство распространяется на сумму любого конечного числа слагаемых

Основные свойства определенного интеграла

Свойство 3

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Свойство 4

Если функция f(x) интегрируема на отрезке [a,b] и a<c<b, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Определенный интеграл.

Пример. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^4 dx$$

Решение. Первообразной для x^4 служит $\frac{x^5}{5}$

Воспользуемся формулой Ньютона – Лейбница

$$\int_1^2 x^4 dx = \frac{x^5}{5}\Big|_1^2 = \frac{2^5}{5} - \frac{1^5}{5} = \frac{32}{5} - \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

Ответ: 31/5

244. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx$.

Решение. $\int_1^2 (5x^4+2x-8)\,dx = \int_1^2 5x^4\,dx + \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 8\,dx = x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

Р е ш е н и е. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=-\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)=$

$=-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-1\right)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

Основные формулы интегрирования

1. $\int 0 \cdot dx = C$
2. $\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$
3. $\int x^n \cdot dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,$

   $n \neq -1,\ x > 0$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$
11. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < |a|$
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + C$
13. «Высокий» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C,\ |x| \neq a$$
14. «Длинный» логарифм:

    $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

$_0$

Вычислите следующие определенные интегралы:

5. 1) $\int_0^2 x^2\,dx$; 2) $\int_1^2 x^3\,dx$; 3) $\int_1^3 x^4\,dx$.

6. 1) $\int_{-2}^{3} (4x^3-3x^2+2x+1)\,dx$; 2) $\int_{-1}^{0} (x^3+2x)\,dx$.

7. 1) $\int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^3}$; 2) $\int_{1/3}^{1/2} \frac{dx}{x^2}$; 3) $\int_0^4 \sqrt{x}\,dx$.

8. 1) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; 2) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

11. 1) $\int_0^{\pi/3} \sin x\,dx$; 2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx$; 3) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x-\sin x)\,dx$.

Вычисление определенных интегралов методов подстановки

285. $\int_0^1 (4x^3+1)^5 x^2\,dx.$

Решение. $\int_0^1 (4x^3+1)^5 x^2\,dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^3+1,\ t_1 = 4\cdot 0^3+1 = 1, \\ dt = 12x^2\,dx,\ t_2 = 4\cdot 1^3+1 = 5 \\ x^2\,dx = \frac{1}{12}dt; \end{array} \right| =$

$$= \frac{1}{12}\int_1^5 t^5\,dt = \frac{1}{12}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_1^5 = \frac{1}{72}(5^6-1^6) = 217.$$

288. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1}$.

Решение. $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1} = \left| \begin{matrix} t = 5x^4+1, \ t_1 = 5\cdot 0^4+1=1, \\ dt = 20x^3\,dx, \ t_2 = 5\cdot 1^4+1=6 \\ x^3\,dx = \frac{1}{20}\,dt; \end{matrix} \right| = \frac{1}{20}\int_1^6 \frac{dt}{t} =$

$= \frac{1}{20}\ln t\,\Big|_1^6 = \frac{1}{20}(\ln 6 - \ln 1) = \frac{1}{20}\ln 6.$

Теперь вычислим этот интеграл иначе, а именно, найдем первообразную функцию и возвратимся к старой переменной, не меняя пределов интегрирования:

$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{5x^4+1} = \left| \begin{matrix} t = 5x^4+1, \\ dt = 20x^3\,dx, \\ x^3\,dx = \frac{1}{20}\,dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{20}\ln t = \frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{20}(\ln 6 - \ln 1) =$$

$$= \frac{1}{20}\ln 6.$$

№6. Вычислить определённый интеграл методом подстановки

В1 $\int_{-1}^{2} (2x+3)^2\, dx$

В2 $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sin 4x \; dx$

В3 $\int_{-2}^{1} (3x-1)^3\, dx$

В4 $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x \; dx$

В5 $\int_{-2}^{0} (4x+1)^2\, dx$

В6 $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x \; dx$

В7 $\int_{-3}^{0} (5x-3)^3\, dx$

В8 $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} \sin 6x \; dx$

В9 $\int_{0}^{2} (6x-5)^2\, dx$

В10 $\int_{0}^{\frac{\pi}{16}} \cos 4x \; dx$

Вычислите:

1. $\int_{1}^{3} 8x^3 dx$

2. $\int_{1}^{4} \sqrt{x} dx$

3. $\int_{-1}^{2} (2x + 3x^2 + 4) dx$

4. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x dx$

5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$

6. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

7. $\int_{2}^{3} (2x-3)^2 dx$

8. $\int_{0}^{1} (4x^3+1)x^2 dx$

9. $\int_{0}^{1} e^{2x} dx$

10. $\int_{0}^{\pi/4} \sin 4x dx$

281. $\int_{2}^{3}(2x-1)^3\,dx.$

282. $\int_{1}^{2}\frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}.$

283. $\int_{1}^{5}\sqrt{(2x-1)^3}\,dx.$

284. $\int_{0}^{2}5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx.$

285. $\int_{0}^{1}(4x^3+1)^5x^2\,dx.$