1. Первообразная

Функция F(x) называется <u>первообразной</u> функции f(x) на промежутке X, если в каждой точке x этого промежутка

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

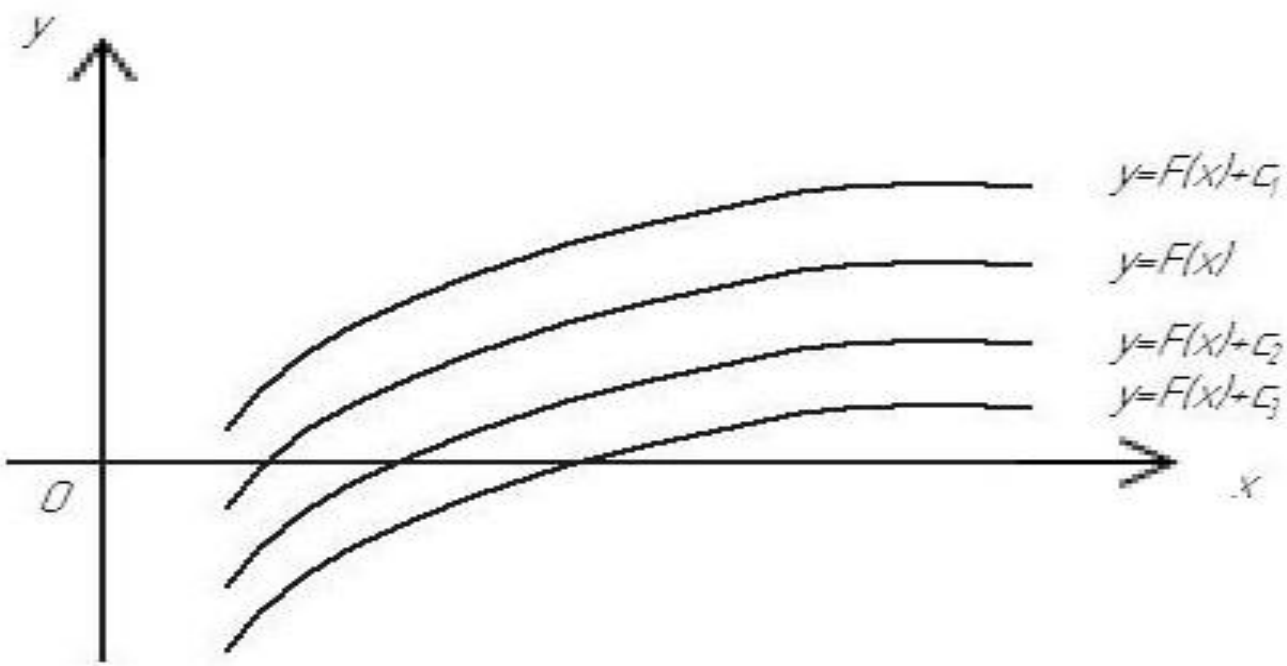
Совокупность всех первообразных для функции f(x) на промежутке X называется неопределенным интегралом от функции f(x).

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Функция f(x) называется подынтегральной функцией.

Выражение f(x)dx называется подынтегральным выражением.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: семейство интегральных кривых.



Интегрирование является операцией, обратной дифференцированию.

Для проверки правильности результата интегрирования надо продифференцировать результат.

Теорема существования неопределенного интеграла

Если функция *f* (*x*) непрерывна на [*a*, *b*], то для нее существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл.

2. СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1

Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2

Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

3

Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого.

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4

Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла.

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

5

Интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от каждой функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3. Таблица интегралов

$$\int 0 \cdot du = c$$

$$\int du = u + c$$

$$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$$

$$\alpha \neq -1$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + c$$

$$\int e^u \, du = e^u + c$$

$$\int \sin u\,du = -\cos u + c$$

$$\int \cos u\,du = \sin u + c$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + c$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + c$$

$$\int tgu\,du = -\ln\left|\cos u\right| + c$$

$$\int ctgu\,du = \ln\left|\sin u\right| + c$$

4. Замена переменной в неопределенном интеграле.

4.1. Непосредственное интегрирование

Пример 1

Вычислить интеграл

$$\int (x^3 - 1)^2 \, dx =$$

Решение.

$$\int (x^3 - 1)^2\, dx =$$

$$= \int (x^6 - 2x^3 + 1)\ dx =$$

$$= \int x^6\, dx - 2\int x^3\, dx + \int dx =$$

$$= \frac{x^7}{7} - \frac{2 \cdot x^4}{4} + x + c.$$

4.2. Подведение множителя под знак дифференциала

Таблица дифференциалов

$$adu = d(ax+b)$$

$$u^{\alpha}du = d\,\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\frac{du}{u} = d\,\ln|u|$$

$$a^{u}du = d\,\frac{a^{u}}{\ln a}$$

$$e^{u}du = de^{u}$$

$$\sin u du = -d \cos u$$

$$\cos u du = d \sin u$$

$$\frac{du}{\cos^2 u} = dtgu$$

$$\frac{du}{\sin^2 u} = -dctgu$$

$$\frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = d \arcsin \frac{u}{a}$$

$$\frac{du}{1 + x^2} = darctgu$$

Пример 2

Вычислить интеграл

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$$

$$\sqrt{\sin x} \cdot \cos x \, dx = \sqrt{\sin x} \, d \sin x \, ,$$

$$= \begin{matrix} u = \sin x \\ \sqrt{\sin x} = u^{\frac{1}{2}} \end{matrix} => \int u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$\boxed{= \frac{(\sin x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \, .}$$

4.3. Метод замены переменной или метод подстановки

<u>Метод замены переменной</u> описывается формулой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt$$

Пример 3

Вычислить интегралы:

$$\int x(x-1)^{12}\,dx$$

Решение:

$$\int x(x-1)^{12}\,dx = \left| \begin{array}{c} x-1=t \\ x=t+1 \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$= \int (t+1)\cdot t^{12}\,dt = \int t^{12}\,dt + \int t^{13}\,dt =$$

$$= \frac{t^{13}}{13} + \frac{t^{14}}{14} + C = \frac{(x-1)^{13}}{13} + \frac{(x-1)^{14}}{14} + C$$

Пример 4

$$\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$$

Решение:

$$\int \sin^4 x \cdot \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| =$$

$$= \int t^4 dt = \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

Теорема

Пусть F(x) – некоторая первообразная для функции f(x).

Тогда

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx+b)+C$$

Пример 5

Вычислить интеграл:

$$\int \frac{1}{4x+3}\,dx$$

Решение:

$$\int \frac{1}{4x+3}dx = \begin{vmatrix} k=4 \\ b=3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\ln|4x+3| + C$$