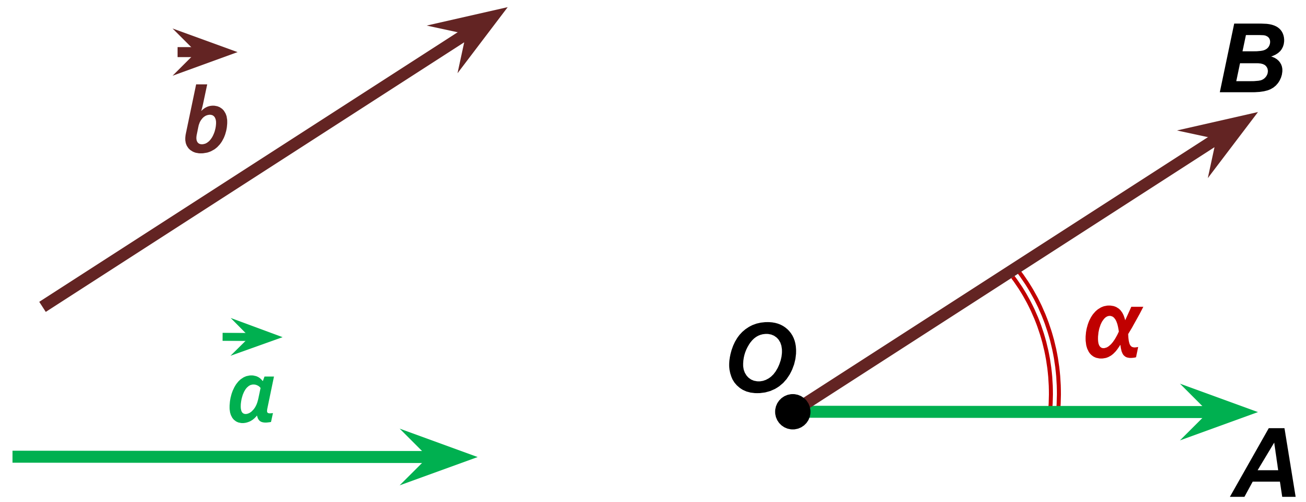
Скалярное произведение векторов

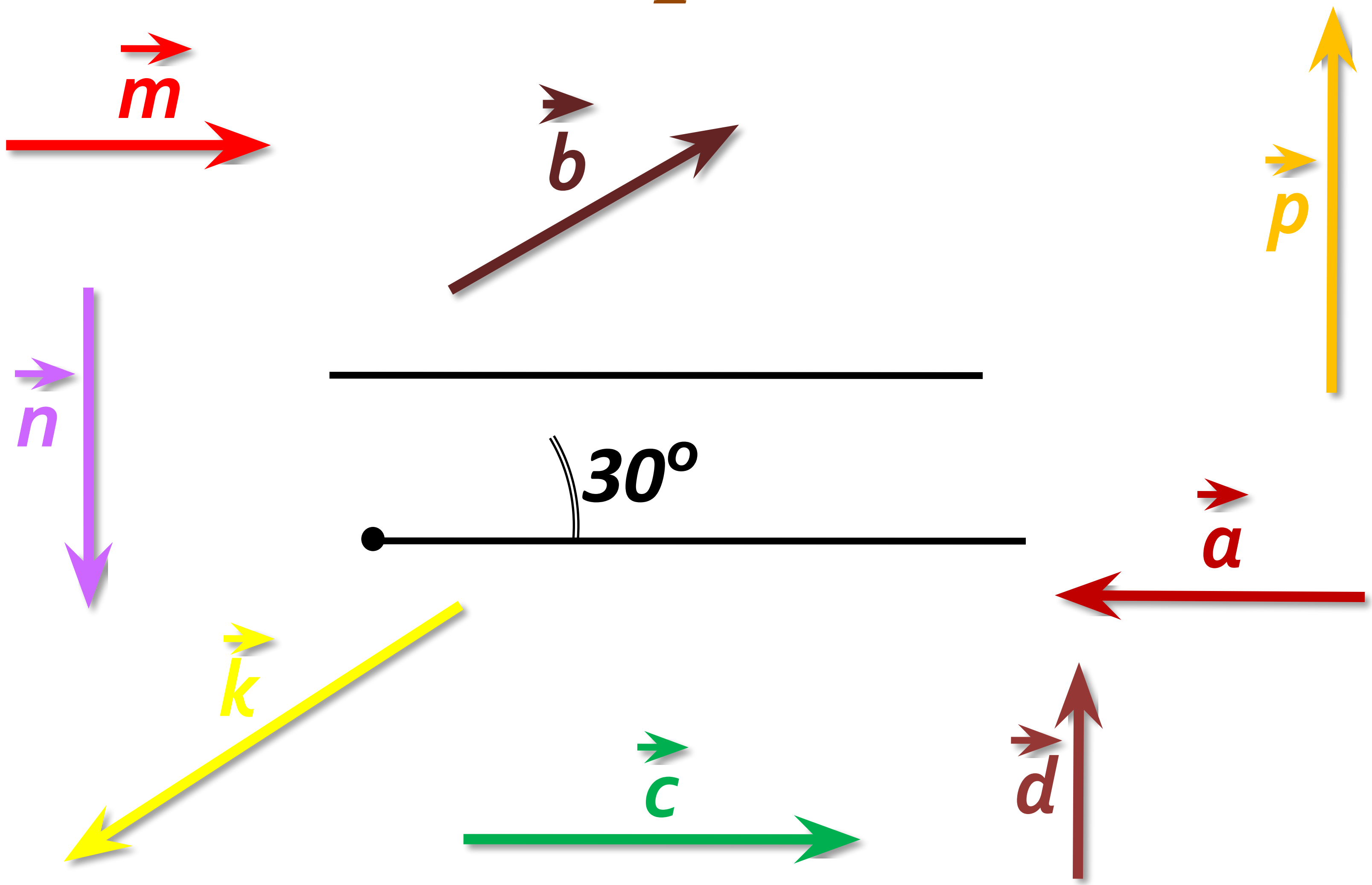
mathvideourok.moy.su

Угол между векторами



$$\widehat{(\vec{a};\ \vec{b})} = \widehat{(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})} = \alpha$$

Определите угол между векторами

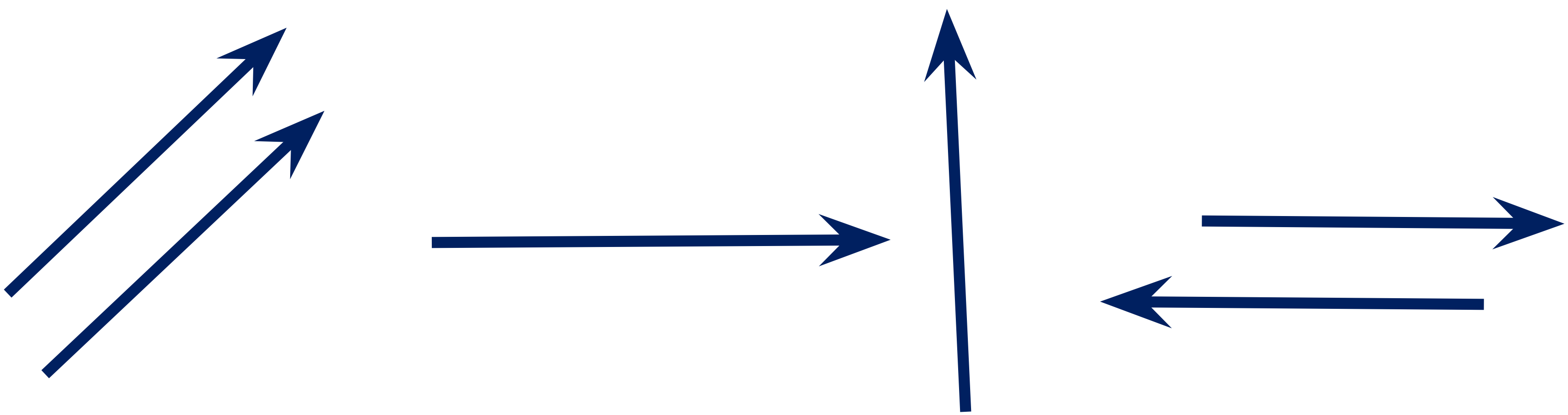


$$(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}) = \alpha$$

$$Если\ \alpha = 0, то\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{в}$$

$$Если\ \alpha = 90^\circ, то\ \vec{a} \perp \vec{в}$$

$$Если\ \alpha = 180^\circ, то\ \vec{a} \uparrow\downarrow \vec{в}$$



Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a};\vec{b})}}$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0\ ; \quad \vec{a}\perp\vec{b}$$

$Например:$

$|\vec{a}| = 2$

$|\vec{в}| = 4$

$\alpha = 60°$

$\vec{a} \cdot \vec{в} = ?$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = |\vec{a}| \cdot |\vec{в}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{в} = 2 \cdot 4 \cos 60° = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$$

$Ответ: 4$

Скалярное произведение в координатах

Скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) **равен квадрату его длины**.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

Теорема: скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2}$$

$Например:$

$\vec{a}\{3;4\}\ \vec{в}\{-1;2\}$

$\vec{a}\cdot\vec{в}=?$

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{в}=3\cdot(-1)+4\cdot 2=5$$

$Ответ: 5$

Скалярное произведение в координатах

Следствие 2: косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ выражается формулой

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}}$$

Следствие 1: ненулевые векторы $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ и $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Например:

$\vec{a}\left\{3;4\right\}\ \vec{в}\left\{-8;6\right\}$

$\alpha = ?$ *между векторами*

Решение:

$$Cos\alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

$$Cos\alpha = \frac{3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{64+36}} = 0$$

$$\alpha = 90°$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы соотношения:

1^o $\vec{a}^2 \geq 0$, причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2^o $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон).

3^o $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон).

4^o $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).