Бином Ньютона

Комбинаторика

Сегодня на уроке

1. Напомним, какие соединения называют сочетаниями.
2. Вспомним формулу для подсчёта числа сочетаний.
3. Вспомним свойства сочетаний.
4. Познакомимся с формулой бинома Ньютона.
5. Скажем, что называют треугольником Паскаля.
6. Познакомимся со свойством элементов строки треугольника Паскаля.

Чему равно значение C_{36}^{3}?

А 7140

В 33

Б 42 840

Г 1 190

Чему равно значение C_{36}^{3}?

А 7140

Б 42 840

В 33

Г 1 190

Чему равно значение выражения $C_{101}^3 - C_{100}^3$?

А 9900

В 1650

Б 4950

Г 10

Чему равно значение выражения $C_{101}^3 - C_{100}^3$?

А 9900

В 1650

Б 4950

Г 10

Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 10 членов научного общества?

А 604 800

В 120

Б 10

Г 5040

Сколькими способами можно делегировать троих студентов на межвузовскую конференцию из 10 членов научного общества?

А 604 800

В 120

Б 10

Г 5040

Вспомним

Сочетаниями из m элементов по n элементов в каждом $(n \leq m)$ называют соединения, каждое из которых содержит n элементов, взятых из данных m разных элементов, и которые отличаются одно от другого по крайней мере одним элементом.

$$\boxed{C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}}$$

$$\boxed{C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}} \qquad m \geq n$$

Вспомним

Свойства сочетаний

Свойство 1.

$$\boxed{C_m^n = C_m^{m-n}}$$

Свойство 2 (*рекуррентное свойство*).

$$\boxed{C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}}$$

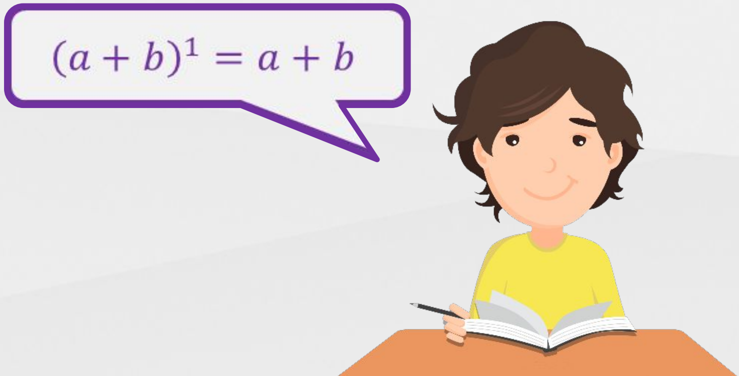
Бином Ньютона

Биномами в теории многочленов часто называют двучлены.

Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ при условии, что $a + b \neq 0$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$



Бином Ньютона

Рассмотрим целые неотрицательные степени бинома $a + b$ при условии, что $a + b \neq 0$.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b$$

$$(a+b)^2 = 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2$$

$$(a+b)^3 = 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b) =$$

$$= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4$$

$$(a+b)^5 = (a+b)^4(a+b) = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4)(a+b) =$$

$$= a^5 + 4a^4b + 6a^3b^2 + 4a^2b^3 + ab^4 + a^4b + 4a^3b^2 + 6a^2b^3 + 4ab^4 + b^5 =$$

$$= 1 \cdot a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1 \cdot b^5$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Бином Ньютона

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ \dots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Формула справедлива для каждого натурального значения m.

Числа C_m^n называют биномиальными коэффициентами.

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$C_6^0 = 1,\ C_6^1 = \frac{6!}{(6-1)! \cdot 1!} = \frac{6!}{5! \cdot 1!} = 6,\ C_6^2 = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15,\ C_6^3 = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20,$$

$$C_6^4 = \frac{6!}{(6-4)! \cdot 4!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15,\ C_6^5 = \frac{6!}{(6-5)! \cdot 5!} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} = 6,\ C_6^6 = 1.$$

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля – таблица значений C_m^n, которая составлена на основе рекуррентного свойства числа сочетаний $C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$ с учётом того, что $C_m^0 = C_m^m = 1$.

Треугольник Паскаля

$$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Первый и последний члены этой строки равны $C_4^0 = C_4^4 = 1$.

Треугольник Паскаля

$C_m^n + C_m^{n+1} = C_{m+1}^{n+1}$

$C_m^n = C_m^{m-n}$

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Числа, одинаково удалённые от концов строки треугольника Паскаля, равны.

$C_5^0 = C_5^5 = 1$

$C_6^0 = C_6^6 = 1$

Запишем разложение бинома $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^5$.

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^5=\left(2x+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^5=C_5^0\cdot(2x)^5+C_5^1\cdot(2x)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+C_5^2\cdot(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+$$

$$+C_5^3\cdot(2x)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+C_5^4\cdot 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4+C_5^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5$$

$$(a+b)^m=C_m^0\cdot a^m+C_m^1\cdot a^{m-1}b+C_m^2\cdot a^{m-2}b^2+\ \dots\ +C_m^n\cdot a^{m-n}b^n+\ \dots\ +C_m^{m-1}\cdot ab^{m-1}+C_m^m\cdot b^m$$

$$C_m^n=\frac{m!}{(m-n)!\cdot n!}$$

Треугольник Паскаля

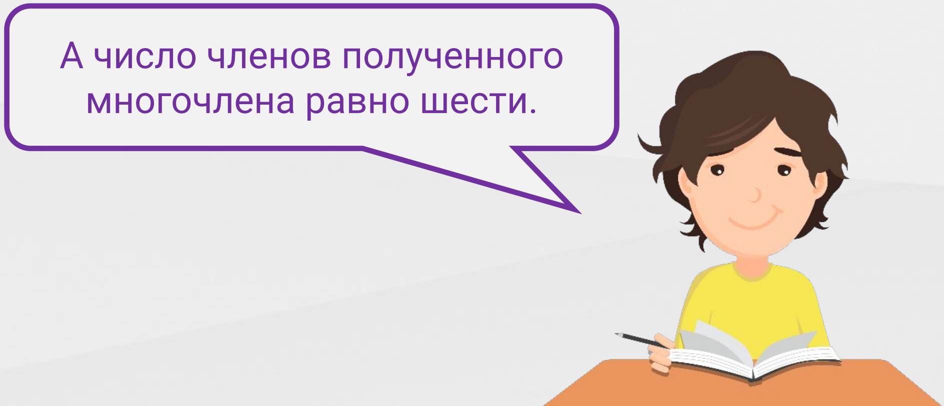
m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Запишем разложение бинома $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^5$.

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^5=\left(2x+\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^5=\overset{1}{C_5^0}\cdot(2x)^5+\overset{5}{C_5^1}\cdot(2x)^4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\overset{10}{C_5^2}\cdot(2x)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+$$

$$+\overset{10}{C_5^3}\cdot(2x)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\overset{5}{C_5^4}\cdot 2x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\overset{1}{C_5^5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^5=32x^5-40x^4+20x^3-5x^2+\frac{5}{8}x-\frac{1}{32}$$

Показатели степени первого слагаемого, т. е. $2x$, последовательно убывают на единицу от 5 до 0, а показатели степени второго слагаемого, т. е. $-\frac{1}{2}$, возрастают на единицу от 0 до 5.



Треугольник Паскаля

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

<u>При записи разложения степени бинома</u> полезно контролировать следующие моменты:

1) число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя m степени бинома, т. е. равно $m + 1$;

2) показатели степени первого слагаемого бинома последовательно <u>убывают</u> на единицу от m до 0, а показатели второго последовательно <u>возрастают</u> на единицу 0 до m;

3) биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле бинома Ньютона, равны между собой.

Свойство элементов строки треугольника Паскаля

$$\boxed{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m}$$

Это равенство получается из формулы бинома Ньютона при $a = b = 1$.

$$C_m^0 \cdot 1^m + C_m^1 \cdot 1^{m-1} \cdot 1 + C_m^2 \cdot 1^{m-2} \cdot 1^2 + \ \dots + C_m^n \cdot 1^{m-n} \cdot 1^n + \ \dots + C_m^{m-1} \cdot 1 \cdot 1^{m-1} + C_m^m \cdot 1^m = (1+1)^m,$$

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ \dots + C_m^n + \ \dots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ \dots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Задание № 1

Запишите разложение бинома $(2x + 3)^4$.

Решение:

$$(2x + 3)^4 = C_4^0 \cdot (2x)^4 + C_4^1 \cdot (2x)^3 \cdot 3 + C_4^2 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + C_4^3 \cdot 2x \cdot 3^3 + C_4^4 \cdot 3^4$$

$$(a + b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ \dots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ \dots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Треугольник Паскаля

m \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Задание № 1

Запишите разложение бинома $(2x+3)^4$.

Решение:

$$(2x+3)^4 = \overset{1}{C_4^0} \cdot (2x)^4 + \overset{4}{C_4^1} \cdot (2x)^3 \cdot 3 + \overset{6}{C_4^2} \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 + \overset{4}{C_4^3} \cdot 2x \cdot 3^3 + \overset{1}{C_4^4} \cdot 3^4 =$$

$$= 1 \cdot 16x^4 + 4 \cdot 8x^3 \cdot 3 + 6 \cdot 4x^2 \cdot 9 + 4 \cdot 2x \cdot 27 + 1 \cdot 81 =$$

$$= 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81.$$

Ответ: $16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$.

Задание № 2

С помощью свойства элементов строки треугольника Паскаля найдите суммы:

а) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$; б) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5$.

Решение:

а) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 = 32;$

б) $C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 = 64 - \overset{1}{C_6^0} - \overset{1}{C_6^6} = 64 - 1 - 1 = 62,$

$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6 = 64.$

Ответ: а) 32; б) 62.

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$$

$$C_m^0 = C_m^m = 1$$

Итоги урока

Вспомним

Сочетаниями из m элементов по n элементов в каждом $(n \leq m)$ называются соединения, каждое из которых содержит n элементов,

Вспомним

Свойства сочетаний

Бином Ньютона

Треугольник Паскаля

$$C_m^n = C_m^{m-n}$$

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Свойство элементов строки треугольника Паскаля

$$\boxed{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m}$$

Это равенство получается из формулы бинома Ньютона при $a = b = 1$.

$$C_m^0 \cdot 1^m + C_m^1 \cdot 1^{m-1} \cdot 1 + C_m^2 \cdot 1^{m-2} \cdot 1^2 + \ldots + C_m^n \cdot 1^{m-n} \cdot 1^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 1 \cdot 1^{m-1} + C_m^m \cdot 1^m = (1+1)^m,$$

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Вспомним

Свойство элементов строки треугольника Паскаля

$$\boxed{C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m}$$

Это равенство получается из формулы бинома Ньютона при $a = b = 1$.

$$C_m^0 \cdot 1^m + C_m^1 \cdot 1^{m-1} \cdot 1 + C_m^2 \cdot 1^{m-2} \cdot 1^2 + \ldots + C_m^n \cdot 1^{m-n} \cdot 1^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot 1 \cdot 1^{m-1} + C_m^m \cdot 1^m = (1+1)^m,$$

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^n + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots + C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$