Часть 2

Раздел 4. Физика колебаний и волн

Лекция 1

Тема 4.1. Кинематика гармонических колебаний

Гармонические колебания.

Гармонические осцилляторы.

Уравнение гармонических колебаний.

Пружинный, физический и математический маятники.

Колебательный контур.

Сложение гармонических колебаний

Гармонические колебания. Гармонические осцилляторы

Колебания – это движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени. У колеблющегося маятника, например, во времени изменяется координата его центра масс, а в случае переменного электрического тока – напряжение и сила тока в цепи.

Колебания бывают механическими, электромагнитными и т. п., однако и те, и другие *описываются одними и теми же характеристиками, одними и теми же математическими уравнениями*. Это позволяет применять одни и те же подходы к изучению колебаний разной физической природы.

Гармонические колебания. Гармонические осцилляторы

Простейшим типом колебаний являются *гармонические колебания* – это колебания, при которых характеристика тела или процесса изменяется *со* временем *по закону синуса или косинуса*.

Необходимость изучения гармонических колебаний обусловлена, по крайней мере, двумя причинами.

1. Колебания, которые встречаются в природе или в технике, имеют характер или гармонический, или близкий к нему.

2. Периодические процессы (это процессы, которые повторяются через равные промежутки времени) часто можно представить как наложение нескольких гармонических колебаний.

Гармонические колебания. Гармонические осцилляторы

Если физическая величина s совершает гармонические колебания, то математически они описываются уравнением следующего типа:

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.1)$$

где A – *амплитуда колебаний* (максимальное значение колеблющейся величины); ω_0 – *круговая* (*циклическая*) *частота*; φ – *начальная фаза колебаний* в момент времени $t = 0$; $(\omega_0 t + \varphi)$ – *фаза колебаний в момент времени t*.

Поскольку косинус изменяется в пределах от +1 до –1, s может принимать значения от $+A$ до $–A$.

Одни и те же состояния (значения) системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T.

Гармонические колебания. Гармонические осцилляторы

Этот промежуток времени называется <u>*периодом колебаний*</u>, за который <u>фаза колебания получает приращение 2π</u>:

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

откуда

$$T = 2\pi/\omega_0. \qquad (1.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний ($\nu = 1/T$), называется <u>*частотой колебаний*</u>, - это <u>число полных колебаний, совершаемых в единицу времени</u>.

С учетом 1.2 получаем $\omega_0 = 2\pi\nu$.

Единицей измерения частоты является <u>*герц*</u> (<u>Гц</u>) – частота периодического процесса, в котором за 1 с совершается одно полное колебание.

Гармонические колебания. Гармонические осцилляторы

Рассмотрим механические гармонические колебания, в которых участвует материальная точка. Пусть колебания совершаются вдоль оси x около положения равновесия, которое можно принять за начало координат.

Тогда зависимость координаты x от времени будет описываться уравнением, аналогичным уравнению 1.1:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1.3)$$

Найдем скорость и ускорение колеблющейся материальной точки, взяв первую и вторую производные от 1.3 по времени:

$$V = dx/dt = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \qquad (1.4)$$

$$a = d^2x/dt^2 = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x =$$

$$= A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \qquad (1.5)$$

Уравнение гармонических колебаний

Если масса колеблющейся материальной точки равна m, то сила, действующая на нее, с учетом 1.5 и 1.1 запишется в виде

$$\underline{F} = ma = -mA\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2\underline{x}. \qquad (1.6)$$

Из 1.6 следует, что сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону, т. е. в сторону положения равновесия (на что указывает знак «-» в правой части уравнения).

Кинетическая энергия колеблющейся материальной точки

$$T = mV^2/2 = mA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi)/2, \qquad (1.7)$$

Уравнение гармонических колебаний

а <u>потенциальная энергия</u> материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием силы F, <u>равна работе по перемещению материальной точки на расстояние</u> dx:

$$\Pi = -Fdx = m\omega_0^2x^2/2 = mA^2\omega_0^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)/2. \quad (1.8)$$

Тогда полная энергия

$$E = T + \Pi = mA^2\omega_0^2/2. \quad (1.9)$$

Из уравнения 1.5 следует, что $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2x$, откуда получаем уравнение

$$d^2x/dt^2 + \omega_0^2x = 0, \quad (1.10)$$

которое описывает колебания так называемого <u>*гармонического осциллятора*</u>.

Пружинный, физический и математический маятники

Примеры гармонических осцилляторов – пружинный, физический и математический маятники, а также колебательный контур – система, состоящая из включенных последовательно друг другу конденсатора, катушки индуктивности и резистора (сопротивления). Рассмотрим их более детально.

1.*Пружинный маятник* – это тело массой m, подвешенное на абсолютно упругой пружине и совершающее гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k – коэффициент ее упругости (жесткость). Уравнение колебаний пружинного маятника имеет вид

$$md^2x/dt^2 = -kx \text{ или } d^2x/dt^2 = -(k/m)x. \qquad (1.11)$$

Пружинный, физический и математический маятники

Это означает, что $\omega_0^2 = k/m$, откуда для циклической частоты и периода колебаний получаем

$$\omega_0 = (k/m)^{1/2}, \qquad (1.12)$$

$$T = 2\pi(m/k)^{1/2}. \qquad (1.13)$$

В соответствии с 1.8 потенциальная энергия пружинного маятника

$$П = m\omega_0^2 x^2/2 = m(k/m)x^2/2 = kx^2/2. \qquad (1.14)$$

2. <u>***Физический маятник***</u> – это твердое тело с массой *m*, под действием силы тяжести совершающее <u>колебания вокруг неподвижной горизонтально ориентированной оси подвеса</u>, которая находится <u>выше</u> его <u>центра масс</u>, удаленного от нее на расстояние l.

Пружинный, физический и математический маятники

Если такой маятник отклонить из положения равновесия на угол α, возникнет момент силы, которая будет стремиться вернуть маятник в положение равновесия. Однако маятник по инерции минует его и отклонится на такой же угол в другую сторону.

Уравнение, описывающее изменение во времени угла записывается в следующем виде:

$$d^2\alpha/dt^2 + (mgl/J)\alpha = 0, \qquad (1.15)$$

где J – момент инерции маятника относительно оси подвеса. Из 1.15 получаем выражения для <u>циклической частоты и периода колебаний</u>

$$\omega_0 = (mgl/J)^{1/2}, \qquad (1.16)$$

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(J/mgl)^{1/2}. \qquad (1.17)$$

Пружинный, физический и математический маятники

Величину $L = J/ml$ называют приведенной длиной физического маятника. Поэтому уравнение 1.17 может быть переписано в следующем виде:

$$T = 2\pi(L/g)^{1/2}. \qquad (1.18)$$

Иными словами, период колебаний физического маятника определяется в первую очередь длиной физического маятника.

3. *Математический маятник* – это идеализированная система, представляющая собой материальную точку с массой m, которая подвешена на нерастяжимой невесомой нити длиной l и которая совершает колебания под действием силы тяжести. Математический маятник - частный случай физического маятника, поэтому уравнения 1.16 и 1.17 описывают и его характеристики.

Пружинный, физический и математический маятники

Поскольку момент инерции математического маятника $J = ml^2$, то период его колебаний

$$T = 2\pi(l/g)^{1/2}. \qquad (1.19)$$

Как следует из 1.19, период колебаний математического маятника определяется только длиной подвеса, если речь идет об опыте на Земле.

Поскольку, например, на Луне ускорение свободного падения меньше, чем на Земле, то период колебаний того же самого математического маятника будет там больше, чем на Земле.

Хорошим приближением к математическому маятнику может служить такой небольшой тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити, у которого вся масса сосредоточена в его центре масс.

Пружинный, физический и математический маятники

Если сравнить выражения 1.18 и 1.19, можно сказать, что, если длина физического маятника L будет равна длине l математического маятника, то периоды их колебаний будут одинаковыми. Отсюда следует смысл понятия приведенной длины физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебания которого такой же, как и у физического маятника.

4. Колебательный контур. Составим идеализированную электрическую цепь из последовательно соединенных друг с другом катушки с индуктивностью L, конденсатора с емкостью C, сопротивление которой $R \approx 0$ Ом.

Зарядим конденсатор, сообщив его обкладкам заряды $\pm Q$.

Для определенности будем считать, что верхняя обкладка заряжена положительно, а нижняя – отрицательно.

Колебательный контур

В результате <u>между обкладками конденсатора появится электрическое поле</u> с энергией $Q^2/2C$. Если теперь <u>конденсатор замкнуть на катушку индуктивности</u>, конденсатор начнет разряжаться через нее, т. е. заряды на его обкладках будут уменьшаться, следовательно, энергия электрического поля начнет убывать. Однако, поскольку в контуре потечет ток I, <u>увеличивающийся со временем по экспоненциальному закону</u>, то энергия магнитного поля катушки ($LI^2/2$) будет возрастать.

Если пренебречь потерями энергии на нагревание элементов цепи, то можно считать, что <u>суммарная энергия колебательного контура будет оставаться неизменной</u>.

Колебательный контур

К концу первой четверти периода конденсатор оказывается полностью разряженным, поэтому его энергия (иными словами, энергия электрического поля) обратится в нуль, а ток в цепи и энергия магнитного поля катушки индуктивности достигнут своих наибольших значений.

Сразу после этого ток в цепи начинает уменьшаться, поэтому ослабевает и магнитное поле катушки. Это вызывает появление тока индукции, который направлен так же, как и ток в контуре, препятствуя уменьшению последнего. Конденсатор начинает перезаряжаться так, что на верхней обкладке начинают накапливаться отрицательные заряды, а на нижней – положительные.

Колебательный контур

Раз <u>на обкладках конденсатора появляются электрические заряды</u>, возникает электрическое поле, которое будет ослаблять ток в контуре, и <u>в конце второй четверти периода</u> он обратится в нуль, а <u>заряд на обкладках конденсатора достигнет максимального значения</u>.

<u>Такие процессы будут протекать и в третьей и четвертой четвертях периода</u>, и, если бы в цепи не было никаких потерь энергии, то в ней совершались бы периодические незатухающие колебания, в ходе которых <u>периодически изменялись бы заряды на обкладках конденсатора, напряжение на нем и сила тока, текущего через катушку</u>.

Колебательный контур

Электрические колебания в LC-цепи, как мы установили, сопровождаются превращением энергии электрического поля в энергию магнитного поля и наоборот. В этом смысле их можно сравнить с механическими колебаниями пружинного маятника, при которых происходит взаимопревращение потенциальной и кинетической энергий.

При этом энергия электрического поля ($Q^2/2C$) аналогична потенциальной энергии упругой деформации ($kx^2/2$), а энергия магнитного поля катушки индуктивности ($LI^2/2$) – кинетической энергии ($mV^2/2$), а сила тока в катушке индуктивности – скорости движения маятника.

Колебательный контур

Если контур состоит из катушки индуктивности, конденсатора и резистора, то по закону Ома

$$IR + U_C = -\,LdI/dt,$$

где IR – напряжение на резисторе, $U_C = Q/C$ – напряжение на конденсаторе, $(-\,LdI/dt)$ – ЭДС самоиндукции, которая возникает в катушке при протекании по ней переменного тока. Переписав выражение для закона Ома, получаем

$$LdI/dt + IR + Q/C = 0, \qquad (1.20)$$

Разделив 1.20 на L и подставив dQ/dt вместо I и d^2Q/dt^2 вместо dI/dt, получаем следующее уравнение:

$$d^2Q/dt^2 + (R/L)dQ/dt + Q/LC = 0. \quad (1.21)$$

Колебательный контур

Поскольку внешние ЭДС в цепи отсутствуют, колебания в контуре являются свободными. Если сопротивление в контуре не равно нулю, колебания со временем затухают, если же $R \approx 0$ Ом, колебания будут гармоническими, которые описываются следующим уравнением

$$d^2Q/dt^2 + Q/LC = 0. \qquad (1.22)$$

Величина заряда на обкладках конденсатора при таких гармонических колебаниях изменяется со временем по закону косинуса

$$Q = Q_m\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad (1.23)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда с циклической частотой

$$\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}, \qquad (1.24)$$

которая называется собственной частотой LC-контура.

Колебательный контур / Сложение гармонических колебаний

Период колебаний

$$T = 2\pi(LC)^{1/2}. \qquad (1.25)$$

Формула 1.25 была впервые выведена У. Томсоном и носит его имя.

Одно и то же тело может одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах. В таких случаях возникает задача найти результирующее колебание.

Произведем сложение двух колебаний, происходящих в одном и том же направлении и с одинаковой частотой

$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$ **и** $x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_2)$.

Поскольку частота колебаний одинакова, то разность фаз двух колебаний со временем изменяться не будет, поэтому уравнение суммарного колебания будет подчиняться тому же закону косинуса, что и складывемые колебания.

Сложение гармонических колебаний

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (1.26)$$

Как оказывается, амплитуда и фаза результирующего колебания будут заданы следующими уравнениями

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (1.27)$$

$$tg\varphi = (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)/(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2). \qquad (1.28)$$

Если колебания происходят в одинаковом направлении, но у них незначительно различаются частоты колебаний, результирующее колебание называют ***биением***, у которого амплитуда периодически изменяется во времени.

Пусть для простоты амплитуды двух складываемых колебаний будут одинаковыми, частоты различаются на величину $\Delta\omega \ll \omega$, а начало отсчета выбрано так, что начальные фазы колебаний равны нулю.

Сложение гармонических колебаний

Тогда уравнения колебаний будут иметь следующий вид: $x_1 = A\cos\omega t$ и $x_2 = A\cos[(\omega + \Delta\omega)t]$. Результатом сложения является колебание, описываемое уравнением

$$x = (2A\cos[(\Delta\omega/2)t])\cos\omega t. \qquad (1.29)$$

Как следует из 1.29, <u>результирующее колебание есть произведение двух колебаний</u>. Его можно рассматривать как такое гармоническое колебание, частота которого ω, а амплитуда изменяется в соответствии с периодическим законом $2A\cos[(\Delta\omega/2)t]$, т. е. с гораздо меньшей частотой по сравнению с ω.

<u>Период биений</u> $T_б = 2\pi/\Delta\omega$.

<u>Метод биений используют при настройке музыкальных инструментов, при проверке слуха</u>.

Сложение гармонических колебаний

Бывают, однако, случаи, когда складываются два гармонических колебания одинаковой частоты с амплитудами *A* и *B*, происходящие в двух взаимно перпендикулярных направлениях с разностью фаз, равной *φ*. Выберем начало отсчета так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда получим следующие уравнения колебаний:

$$x = A\cos\omega t,$$

$$y = B\cos(\omega t + \varphi). \qquad (1.30)$$

После преобразований эти выражения дают для траектории движения уравнение эллипса, оси которого ориентированы произвольно относительно координатных осей:

$$x^2/A^2 - (2xy/AB)\cos\varphi + y^2/B^2 = \sin^2\varphi, \qquad (1.31)$$

Сложение гармонических колебаний

а колебания называются эллиптически поляризованными.

Рассмотрим некоторые частные случаи таких колебаний.

1. При $\varphi = m\pi$ ($m = 0, \pm1, \pm2,\ldots$) эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm(B/A)x \qquad (1.32)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям m, а минус – его нечетным значениям. Результирующее колебание является гармоническим с частотой ω и амплитудой $(A^2 + B^2)^{1/2}$, оно совершается вдоль прямой 1.31, которая составляет с осью x угол φ такой, что $\varphi = \mathrm{arctg}(B\cos m\pi/A)$. Такие колебания называются *линейно поляризованными*.

2. При $\varphi = (2m + 1)\pi/2$ уравнение колебаний

Сложение гармонических колебаний

приобретает вид:

$x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1.$ (1.33)

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат. А если *A* = *B*, эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называются циркулярно поляризованными колебаниями (колебаниями, поляризованными по кругу).

Если частоты складываемых гармонических колебаний, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях, различаются, то замкнутые траектории движения оказываются очень сложными и называются *фигурами Лиссажу*.

Вид фигур Лиссажу зависит от соотношений частот и разностей фаз складываемых колебаний. По их виду можно определить неизвестную частоту по известной, найти отношение частот или разностей фаз складываемых колебаний.

Контрольные вопросы

1. Что такое колебания, и какими они бывают?
2. Что такое гармонические колебания, и как они описываются математически?
3. Что понимают под амплитудой, частотой и периодом колебаний?
4. Как выглядит уравнение гармонического осциллятора?
5. Назовите примеры гармонических осцилляторов.
6. Что такое пружинный маятник, и от чего зависят частота и период его колебаний?
7. Что такое физический маятник, и как определяются его частота и период колебаний?
8. Что такое математический маятник, и как рассчитать его частоту и период колебаний?

Контрольные вопросы

9. Дайте определение колебательного контура. В чем сходство колебательного контура с математическим маятником?

10. Как найти частоту и период свободных колебаний LC-контура?

11. Что является результатом сложения двух гармонических колебаний, совершающихся с одинаковой частотой в одном направлении?

12. Когда возникают биения? Как изменяется во времени амплитуда результирующего колебания?

13. К чему приводит сложение гармонических колебаний с одной и той же частотой, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях?

14. Что такое эллиптически поляризованные колебания?

15. При каких условиях эллиптически поляризованные колебания вырождаются в линейно или циркулярно поляризованные колебания?

16. Когда наблюдаются фигуры Лиссажу, и от чего зависит их форма?