Методы научного познания в обучении математике

Литература:

1. Ю.М. Колягин Методика преподавания математики в средней школе. Учебное пособие для студентов физ-мат.фак. пед.институтов - М., Просвещение,1975

2. Я.И. Грудёнов, М.Г. Макарченко Методы научного познания в обучении математике. Методическая разработка

3. Г.И. Саранцев, Л.С. Лунина Обучение методу аналогии - Математика в школе


Анализ и синтез
Индукция
Дедукция
Аналогия
digitalblasphemy.com

Анализ

в форме рассуждений

когда двигаются от искомых к данным задачи

в форме расчленения

когда целое расчленяют на части

Синтез

в форме рассуждений

когда двигаются от данных задачи к искомым

в форме объединения

когда элементы объединяют в целое

Анализ

чтобы узнать, достаточно знать..

Синтез

зная, можно узнать..

Пример использования анализа и синтеза при решении сюжетных задач

Задача. Колхознику надо было быть в пункте, находящемся на расстоянии **134,7** км от дома. **2,4** часа он ехал на автобусе, идущем со скоростью **55** км/ч, а остальную часть пути он прошёл пешком со средней скоростью **4,5** км/ч. Сколько времени он шёл пешком?

время движения пешком

Анализ

Путь, пройденный пешком

Скорость движения пешком

Весь путь

Путь, пройденный автобусом

Скорость движения автобуса
55км/ч

Время движения автобуса
2,4 ч

Синтез

Скорость движения автобуса
55км/ч

Время движения автобуса
2,4 ч

Весь путь
134,7 км

Путь, пройденный автобусом
55*2,4=132 км

Путь, пройденный пешком
134,7-132=2,7 км

Скорость движения пешком
4,5 км/ч

2,7:4,5=0,6

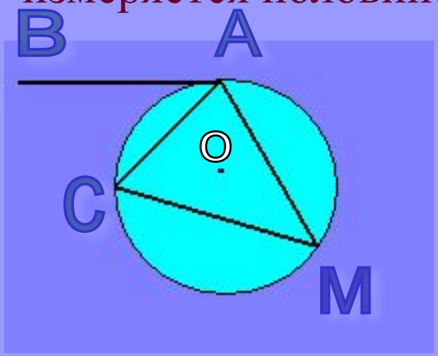
∠

В практике анализ и синтез не выступают раздельно, а используются совместно и дополняют друг друга, составляя

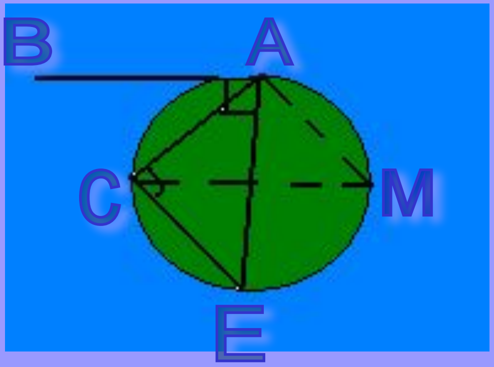
аналитико-синтетический метод

Пример

Доказать: Угол между касательной AB, где A-точка касания, и хордой AC измеряется половиной дуги, заключенной между ними.



Проводим анализ в форме рассуждений от искомого к данным. Чтобы доказать, что ∠BAC измеряется половиной дуги AC, достаточно доказать его равенство другому углу, который также измеряется дугой AC или ей равной дугой (анализ).



Строим вписанный ∠CEA, сторона которого проходит через центр окружности. Из рисунка видим, что ∠CEA=CAB, так как они дополняют один и тот же ∠CAE до прямого (синтез).

Индукция

полная

умозаключение,основанное на рассмотрение всех частных суждений

неполная

не исчерпываются все частные случаи,относящиеся к данной ситуации

Рассуждения, основанные на неполной индукции, может привести к ошибочному результату.

Пример

Вычисляя значения выражения $n^2 + n + 41$

получаем простые числа.

Отсюда вывод: « значения этого выражения – простые числа при любом натуральном ***n*** ».

Этот вывод сделан на основе неполной индукции, так как рассмотрены не все частные случаи. Значит, он может оказаться ошибочным.

Действительно, при ***n*=40** получаем составное число:

$$40^2 + 40 + 41 = 40^2 + 80 + 1 = (40 + 1)^2 = 41^2$$

Использование неполной индукции в школе производится в следующих случаях:

1) для подведения учащихся к самостоятельному "открытию" математических предложений;

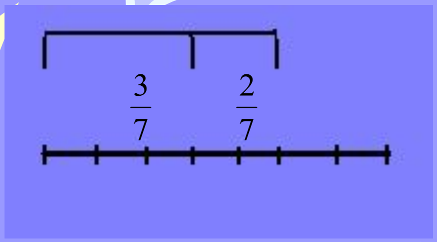
2) чтобы убедить учащихся в справедливости той или иной теоремы, когда строгое доказательство им не под силу;

3) для иллюстрации с помощью наглядных пособий теоремы или её доказательства;

4) как один из действенных методов поиска решения задач.

Пример использования неполной индукции в случае, когда учащимся самим нужно сделать математическое "открытие"

Подводим учащихся к формулировке правила сложения дробей с одинаковыми знаменателями. Предлагаем найти сумму $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$



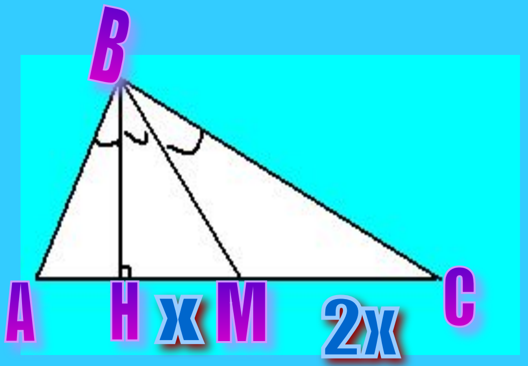
Ученики делят отрезок на 7 равных частей, откладывают на нём друг за другом дроби, подсчётом находят

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

и после этого самостоятельно формулируют правило.

Пример использования приёма неполной индукции, основанного на выявлении предлагаемых свойств геометрических объектов и к их последующему доказательству

Задача. Если медиана и высота, проведённые из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части, то треугольник- прямоугольный.



Рассматриваем ΔАВМ, видим, что АН=НМ. Доказываем, что они действительно равны, и обозначаем каждый из них х. Смотрим на весь чертёж в целом и замечаем, что ВМ – медиана, т.е. АМ=МС. МС=2х.

Рассматриваем треугольник ВНС и из рисунка выявляем, что ВМ – его биссектриса и делит сторону НС на части х и 2х.

Вспоминаем теорему:"Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам". Получаем: $\frac{BH}{BC} = \frac{HM}{MC} \Rightarrow \frac{BH}{BC} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

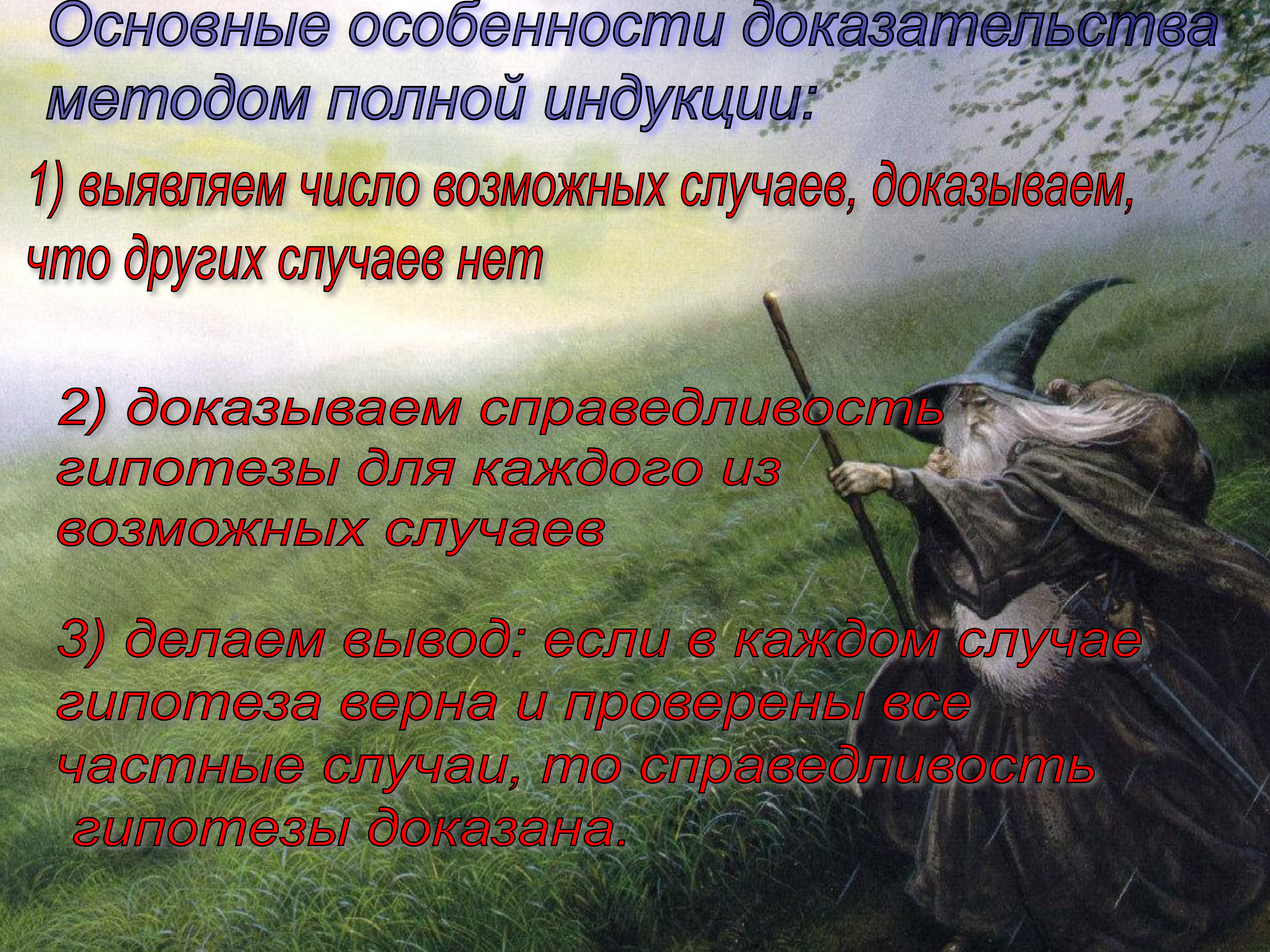
В треугольнике ВНС: sin С=0.5. Отсюда: $\angle$ С=30, $\angle$НВС=60, $\angle$ АВС=90

Основные особенности доказательства методом полной индукции:

1) выявляем число возможных случаев, доказываем, что других случаев нет

2) доказываем справедливость гипотезы для каждого из возможных случаев

3) делаем вывод: если в каждом случае гипотеза верна и проверены все частные случаи, то справедливость гипотезы доказана.



Пример использования полной индукции

Методом полной индукции докажите: «Квадрат любого натурального числа, не кратного **5**, увеличенный или уменьшенный на единицу, делится на **5**».

1) Если число не кратно **5**, то при делении на **5** оно даёт в остатке **1**,**2**,**3** или **4**,т.е. его можно представить в виде:

$5k+1$ $5k+2$ $5k+3$ $5k+4$

Выражения $5k+1$ и $5k+4$ можно объединить, записав их в виде $5p\pm1$. Аналогично объединяются два других выражения.

Значит, любое число, не кратное **5**, можно записать в виде: $5p\pm1$ или $5p\pm2$.

2) Проверяем выполнимость утверждения в **2** случаях:

$$(5p\pm1)^2-1=25p^2\pm10p+1-1=5(5p^2\pm2p)=5q$$

$$(5p\pm2)^2+1=25p^2\pm20p+4-1=5(5p^2\pm4p+1)=5m$$

3) В обоих случаях наша гипотеза верна.

Трактовки понятия дедукции:

дедукция как учение о дедуктивных умозаключениях

дедукция как совокупность дедуктивных умозаключений одной природы

дедукция как форма мышления

дедукция как метод обучения математике

Дедукция как учение о дедуктивных умозаключениях любой природы

изучается логикой и теорией познания, которые рассматривают совокупность правил логического вывода.

.Правило заключения: если известно, что из А следует В, и если выполняется А, то выполняется В, т.е.

$$\frac{A \Rightarrow B, A}{B}$$

Пример

А: Все люди смертны.
В: Сократ – человек. $\Rightarrow$

Сократ смертен.

II. Правило контрапозиции: если верно, что из А следует В, то верно, что из не В следует не А, т.е.

$$\frac{A \Rightarrow B}{\overline{B} \Rightarrow \overline{A}}$$

Пример

Если треугольник равнобедренный (А),
то он имеет два равных угла (В).

Если в треугольнике нет двух равных углов ,
то он не равнобедренный.

III. Правило расширенной контрапозиции: если известно, что при одновременном выполнении A и B следует C, то верно, что из A и одновременного отрицания B следует отрицание C, т.е.

$$\frac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \wedge \overline{B} \Rightarrow \overline{C}}$$

Пример

Если число делится на **2** и на **3**, то оно делится на **6**.

Если число делится на **3** и не делится на **2**, то оно не делится на **6**.

IV. Правило силлогизма: если из A следует B, из B следует C, то из A следует C, т.е.

$$\frac{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$$

Пример

Если две прямые на плоскости не имеют общих точек, то они параллельны.
Если две прямые параллельны, то точки одной прямой равноудалены от другой прямой.

Если две прямые на плоскости не имеют общих точек, то точки одной прямой равноудалены от другой прямой.

Дедукция как форма мышления

представляет собой рассуждение, при котором из ранее установленных предложени
делается логический вывод о справедливости нового предложения.

Виды дедуктивных умозаключений:

1) от общего знания делают логический переход к новому знанию такой же общности
2) от единичного знания переходят к частному знанию
3) от общего знания переходят к менее общему знанию или единичному

Силлогизм

Логическое умозаключение, в котором из двух данных суждений (большой и малой посылок) получают третье (заключение).

Энтимема

Сокращённый силлогизм

Например, « Так как А и В – острые углы прямоугольного треугольника, то их сумма равна 90 градусов». Здесь опущена большая посылка.

Аналогия

как

рассуждение

факт

метод обучения

Схема умозаключения по аналогии:

М обладает свойствами а, в, с, е.
Для К обнаружены свойства а1, в1, с1.

Вероятно, К обладает свойством е1.

где М и К различные явления; а и а1, в и в1...- сходные свойства этих явлений

Аналогия означает соответствие, сходство.

Аналогия как факт

построение аналогов различных заданных объектов и отношений

нахождение соответственных элементов в аналогичных предложениях

составление предложений или задач, аналогичных данным

проведение рассуждений по аналогии

Аналогия как метод обучения в процессе переноса информации:

Учащимся предлагают устные или письменные образцы решения задач, образцы оформления записей и рекомендуют поступать подобным образом в аналогичных ситуациях.

Аналогия как рассуждение при поиске решения задач:

Если учащиеся не могут решить задачу, то им рекомендуется ответить на вопросы: «Не встречалась ли ранее аналогичная задача?» «Нельзя ли воспользоваться способом её решения?».

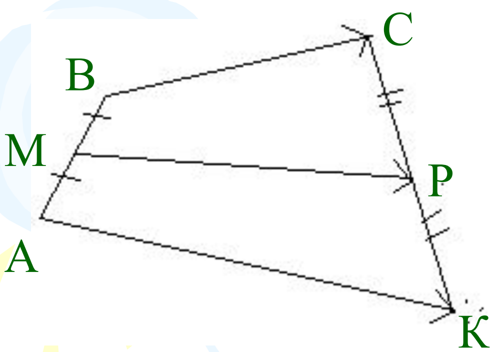
Пример

Решить задачу: «Доказать, что для четырёхугольника АВСК справедливо равенство:

$$\vec{MP} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AK})$$

где М и Р – середины сторон АВ и СК».

Решение



Ставим вопрос: «Не встречалась ли нам подобная задача?» Вспоминаем, что ранее доказывалась теорема о средней линии трапеции с помощью векторов. Пробуем перенести способ доказательства этой теоремы на решаемую задачу. Получаем:

$$\vec{MP} = \vec{MB} + \vec{BC} + \vec{CP}$$
$$\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AK} + \vec{KP}$$

Складывая почленно и, учитывая, что сумма двух противоположных векторов равна нулю, получаем требуемое равенство.