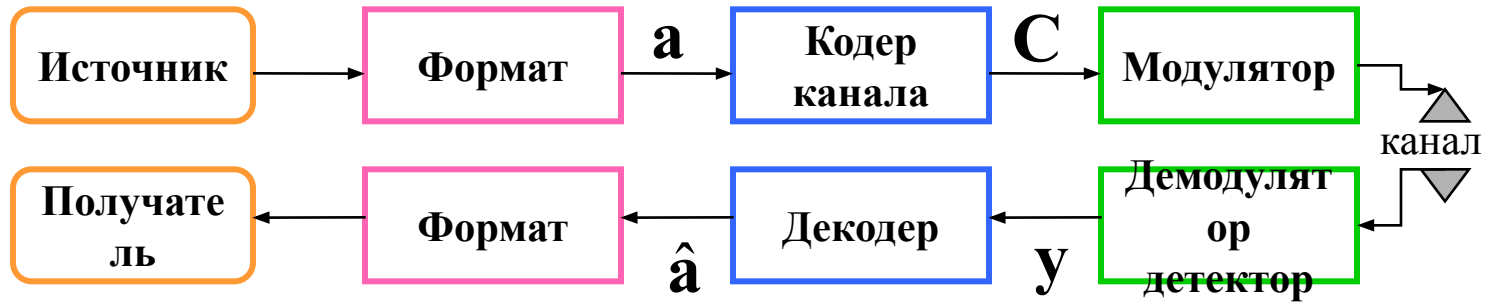


# **Декодирование линейных групповых кодов**

# Система ПИ



$$\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$$

$\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$  принятое кодовое слово или вектор

$\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_{n-1})$  вектор ошибок

# Декодирование по смежным классам

- Таблица смежных классов

- Для строк  $i = 1, 2, \dots, q^{n-k} - 1$  находим ранее не использованный вектор из  $V_n$  минимального веса.

- Обозначим такой вектор как  $e_i$  вектор-ошибок и образуем на его основе  $i$ -ю строку – смежный класс

Нулевое  
Кодовое слово

$c_0$	$c_1$	$\boxtimes$	$c_{2^k-1}$
$e_1$	$e_1 \oplus c_1$	$\boxtimes$	$e_1 \oplus c_{2^k-1}$
$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
$e_{2^{n-k}-1}$	$e_{2^{n-k}-1} \oplus c_1$	$\boxtimes$	$e_{2^{n-k}-1} \oplus c_{2^k-1}$

Смежный класс

Лидеры смежных классов

# Декодирование по МП

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Сообщение	00	10	01	11
Код	0000	1011	0101	1110
Первый смежный класс	1000	0011	1101	0110
Второй смежный класс	0100	1111	0001	1010
Третий смежный класс	0010	1001	0111	1100

## Каким образом действует декодер?

- • Ищет в таблице полученное на выходе канала связи слово  $y$ , например,  $y = (1101)$
- • Принимает решение, что вектор ошибок  $e$  — это лидер класса смежности, содержащего вектор  $y$ , т. е.  $e = (1000)$ .
- • Далее вектор  $y$  декодируется в вектор
  - $c = y - e = (1101) + (1000) = (0101)$
- и делается вывод, что исходно сообщение равно  $a = (01)$

# Синдром

- Синдром (отображение ошибок):
  - $S$  является синдромом  $y$ , соответствующий отображению вектора ошибок  $e$  в  $H$ .

$$S = yH^T = eH^T$$

# Свойства синдрома

- 1 Если проверочная матрица имеет  $(n - k)$ , то синдром  $s$  произвольного вектора  $u$  является вектором длины  $(n - k)$ .
- 2. Поскольку по определению линейного кода вектор  $u$  является кодовым тогда и только тогда, когда  $uH^T = 0$ , то справедливы следующие утверждения

# Утверждения

- *Утверждение.* Синдром  $s$  вектора  $u$  равен  $0$  тогда и только тогда, когда  $u$  является кодовым вектором
- *Утверждение.* Для двоичного линейного кода синдром  $s$  принятого вектора  $u$  равен сумме тех столбцов проверочной матрицы  $H$ , где произошли ошибки.



## Док-во

- Пусть получен вектор  $\mathbf{y} = \mathbf{c} + \mathbf{e}$ .
- По определению синдрома
- $\mathbf{s} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T = \mathbf{e}\mathbf{H}^T$
- Пусть  $\mathbf{e}$  имеет ошибки «1» в координатах с номерами

$$i_1, i_2, \dots, i_v$$

$$\mathbf{e}\mathbf{H}^T = \sum_{j=1}^v e_{i_j} \mathbf{h}_{i_j} = \mathbf{h}_{i_1} + \mathbf{h}_{i_2} + \dots + \mathbf{h}_{i_v}$$

- Тогда имеем
- $\mathbf{h}_{i_j}$  – это  $i_j$  – столбец матрицы  $\mathbf{H}$ .
- Следовательно,  $\mathbf{s} = \sum_{j=1}^v \mathbf{h}_{i_j}$
- синдром выделяет те позиции вектора, где произошли ошибки.

# Алгоритм декодирования

- Составляются таблицы смежных классов и синдромов

1. Вычисляется  $\mathbf{S} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T$

2. Находится лидер смежного класса  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}_i$ , соответствующий  $\mathbf{S}$

3. По синдрому вычисляют оценку  $\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{y} + \hat{\mathbf{e}}$  и оценку информации  $\hat{\mathbf{a}}$ .

– Заметим, что

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{y} + \hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{c} + \mathbf{e}) + \hat{\mathbf{e}} = \mathbf{c} + (\mathbf{e} + \hat{\mathbf{e}})$$

- если  $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{e}$ , то ошибка исправляемая.
- если  $\hat{\mathbf{e}} \neq \mathbf{e}$ , появляется не исправляемая ошибка.

# Пример

- Таблица смежных классов для кода (6,3)

Кодовые слова

000000	110100	011010	101110	101001	011101	110011	000111
000001	110101	011011	101111	101000	011100	110010	000110
000010	110111	011000	101100	101011	011111	110001	000101
000100	110011	011100	101010	101101	011010	110111	000110
001000	111100	⊠			⊠		⊠
010000	100100						
100000	010100				⊠		
010001	100101		⊠			⊠	010110

Лидеры смежных классов

Смежный класс

# Пример таблица синдромов

Вектора ошибок    Синдром

000000	000
000001	101
000010	011
000100	110
001000	001
010000	010
100000	100
010001	111

$\mathbf{c} = (101110)$  Кодовое слово, переданное.

$\mathbf{y} = (001110)$  Принятый вектор.

Синдром  $\mathbf{y}$  вычисляется как :

$$\mathbf{S} = \mathbf{y}\mathbf{H}^T = (001110)\mathbf{H}^T = (100)$$

Оценка ошибки для этого значения синдрома равна

$$\hat{\mathbf{e}} = (100000)$$

Оценка принятого кодового слова после коррекции

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{y} + \hat{\mathbf{e}} = (001110) + (100000) = (101110)$$

# Пример

Все ошибки веса  $\leq \lfloor (d_{\min} - 1)/2 \rfloor$  имеют уникальный синдром

Синдром	Лидер см кл	Кодовые слова				
0000	000000	011101	101010	110111		
0001	000001	011100	101011	110110		
0010	000010	011111	101000	110101		
0100	000100	011001	101110	110011		
1000	001000	010101	100010	111111		
1101	010000	001101	111010	100111		
1010	100000	111101	001010	010111		
0011	000011	011110	101001	110100		111000
0101	000101	011000	101111	110010		010100
0110	000110	011011	101100	110001		H= 100010
1001	001001	010100	100011	111110		010001
1100	001100	010001	100110	111011		
1111	010010	001111	111000	100101		
1011	100001	111100	001011	010110		
1110	100100	111001	001110	010011		
0111	110000	101101	011010	000111		

# Вопросы

