Линейные неоднородные дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами

Общий вид ЛНДУ II пор. с пост. коэф:

$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$, где $f(x)$ есть функция специального вида.

Алгоритм решения: $y = y_0 + y_ч$ – общее решение

1. Найдём y_0 – общее решение однородного уравнения $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$.

2. Найдём $y_ч$ – частное решение неоднородного уравнения. Вид $y_ч$ зависит от вида правой части $f(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Найти общее решение уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = \underbrace{2x+2}_{\text{многочлен}}.$$

1) Найдём общее решение однор. ур-ия — y_0:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$k^2 - 3k + 2k = 0$ $\quad D>0 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 2$, отсюда,

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

2) Найдём частное решение неоднор. ур-ие — y_r:

Правая часть ур-ие имеет вид: $f(x) = 2x+2$ — многочлен I степени, значит и y_r будет содержать многочлен I степени в общем виде — $Ax+B$. Кроме того, в y_r может также появится множитель x^α, где α — это кратность корня характеристич. уравнение вида $k=0$.

В нашем случае $k=0$ нет среди корней характ. уравнение, следовательно, $\alpha = 0$.

$$y_r = (Ax+B)\cdot x^0 = Ax+B$$

$y_r = Ax + B$. Найдём константы A и B.

Подставим $y_r = Ax + B$ в первоначальное уравнение $y'' - 3y' + 2y = 2x + 2$.

Найдём соответствующие производные:

$y_r' = (Ax + B)' = A$,

$y_r'' = (A)' = 0$, подставим:

$0 - 3 \cdot A + 2 \cdot (Ax + B) = 2x + 2$

$-3A + 2A \cdot x + 2B = 2x + 2$, приравниваем коэф-ты при степенях x:

при x^1:
при x^0:
(свободные слагаемые)

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -3A + 2B = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ -3A + 2B = 2 \end{cases} \rightarrow -3 \cdot 1 + 2B = 2$$

$2B = 5 \quad B = 5/2$

$y_r = 1 \cdot x + 5/2 = x + 2,5$

Общее решение $y = y_o + y_r = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x + 2,5$

Пример 2

Найти общее решение уравнения

$$y'' + 2y' + y = \underbrace{\cos x + \sin x}_{\text{тригонометрия}}.$$

1) Найдём общее решение одноp. диф. ур-и-е: (y_0)

$y'' + 2y' + y = 0$

$k^2 + 2k + 1 = 0 \quad D = 0 \quad k_{1,2} = -1$, значит,

$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$.

2) Найдём частное решение неоднор. урав-ие: (y_r)

Правая часть ур-ие имеет вид: $f(x) = \cos x + \sin x$, значит y_r будет иметь вид: $y_r = e^{\alpha x} \cdot (A\cos\beta x + B\sin\beta x) \cdot x^{\nu}$. В данном случае $\alpha = 0$ (в $f(x)$ нет экспоненты), $\beta = 1$. ν – сколько раз встречается корень $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ среди корней характеристич. ур-ие. В нашем случае – 0 раз.

Следовательно, $y_r = \underbrace{e^{0 \cdot x}}_{=1} (A\cos x + B\sin x) \cdot \underbrace{x^0}_{=1} =$

$= A\cos x + B\sin x$.

Найдём коэффициенты A и B.

$y_z = A\cos x + B\sin x$. Подставим y_z в первоначальное уравнение $y'' + 2y' + y = \cos x + \sin x$.

Найдём нужные производные:

$y_z' = (A\cos x + B\sin x)' = -A\sin x + B\cos x$

$y_z'' = (-A\sin x + B\cos x)' = -A\cos x - B\sin x$

$$-A\cos x - B\sin x + 2(-A\sin x + B\cos x) + A\cos x + B\sin x = \cos x + \sin x$$

$$\cancel{-A\cos x} \cancel{- B\sin x} + (-2A)\sin x + 2B\cos x + \cancel{A\cos x} + \cancel{B\sin x} = \cos x + \sin x$$

приведём подобные:

$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x + \sin x$$

Приравним коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ слева и справа:

при $\sin x$: при $\cos x$: $\begin{cases} -2A = 1 \\ 2B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = -1/2 \\ B = 1/2 \end{cases}$ $\Rightarrow y_z = -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x$

Следовательно, общее решение первоначального ур-ие равно: $y = y_0 + y_z = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (-\frac{1}{2})\cos x + \frac{1}{2}\sin x$.

Пример 3

Найти общее решение уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = \underbrace{(3x+2)}_{\text{многочлен}}\,\underbrace{e^{2x}}_{\text{экспонента}}.$$

1) Найдём y_0:

$y'' - 2y' + 3y = 0$ $\quad k^2 - 2k + 3 = 0$ $\quad D = 4 - 4\cdot(+3) = 4 - 12 = -8 < 0$

$$k_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{2}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$$ – корни комплексные

$k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$; $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $y_0 = e^{1\cdot x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x) =$

$$= e^{x}(C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x)$$

2) Найдём $y_{\text{ч}}$:

$f(x) = (3x+2)\cdot e^{2x}$, следовательно, $y_{\text{ч}} = (Ax+B)\cdot e^{2x}\cdot x^{\gamma}$,

чтобы определить γ смотрим, встречается ли $k = 2$ среди корней характерист. ур-ия. $k = 2$ не встречается, значит, $\gamma = 0$.

$$y_{\text{ч}} = (Ax+B)\cdot e^{2x}\cdot \underbrace{x^0}_{=1} = (Ax+B)e^{2x}.$$

Найдём коэффициенты A и B.

$$y_2' = \left(\underbrace{(Ax+B)}_{u}\cdot\underbrace{e^{2x}}_{v}\right)' = A\cdot e^{2x} + (Ax+B)\cdot 2e^{2x}$$

$$y_2'' = 2Ae^{2x} + A\cdot 2e^{2x} + (Ax+B)\cdot 4e^{2x} = 4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x}.$$

Подставим y_2 в первоначальное уравнение:

$$4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x} - 2\left(Ae^{2x} + (Ax+B)2e^{2x}\right) - 3(Ax+B)e^{2x} = (3x+2)e^{2x} \quad \Big| : e^{2x}$$

Экспонента сокращается, раскрываем скобки:

$$4A + \cancel{4Ax} + \cancel{4B} - 2A - \cancel{4Ax} - \cancel{4B} - 3Ax - 3B = 3x+2$$

$2A - 3Ax - 3B = 3x+2$, приравниваем коэф-ты при степ. x.

$$\begin{array}{l} x^1: \\ x^0: \end{array}\begin{cases} -3A = 3 \\ 2A - 3B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ -2 - 3B = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 \\ -3B = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A = -1 \\ B = -4/3, \end{array} \Rightarrow$$

$y_2 = (-x - 4/3)e^{2x}$. Отсюда, общее решение первоначального уравнения:

$$y = y_0 + y_2 = e^x(C_1\cos\sqrt{2}x + C_2\sin\sqrt{2}x) - (x + 4/3)e^{2x}$$

Пример 4

Найти решение задачи Коши:

$$y'' - 9y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

1) Найдём y_0:

$y'' - 9y = 0 \qquad k^2 - 9 = 0 \qquad k^2 = 9 \qquad D > 0$

$k_1 = 3 \quad k_2 = -3$ – действит. корни.

$$y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$$

2) Найдём y_2: $f(x) = \underbrace{2}_{\text{многочлен нулевой степени (const)}} e^{3x}$, $\Rightarrow y_2 = \underbrace{A}_{\text{многочлен нулевой степени в общем виде (const)}} e^{3x} \cdot x^{\nu}$

$k = 3 \Rightarrow$ проверяем: $k = 3$ 1 раз встречается среди корней характеристич. уравнения: $k_1 = 3$, $\Rightarrow \nu = 1$, и

$y_2 = Ae^{3x} \cdot x^1 = Axe^{3x}$. Найдём A. Подставим y_2 в первоначальное уравнение.

$$y_2' = Ae^{3x} + Ax \cdot 3e^{3x} = Ae^{3x} + 3Axe^{3x}$$

$$y_2'' = 3Ae^{3x} + 3Ae^{3x} + 3Ax \cdot 3e^{3x} = 6Ae^{3x} + 9Axe^{3x}.$$

$$6Ae^{3x} + \cancel{9Axe^{3x}} - \cancel{9Axe^{3x}} = 2e^{3x}$$

$$6Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$6A = 2 \qquad A = 1/3 \qquad y_2 = \frac{1}{3}xe^{3x}$

общее решение:

$$y = y_0 + y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{3}xe^{3x} \quad (*)$$

3) Найдем частное решение неоднородного уравнения (решим задачу Коши):

$y(0)=1$ подставляем в (*) вместо x – ноль, вместо y – единицу:

$$1 = C_1 + C_2 + 0, \quad 1 = C_1 + C_2.$$

Найдем от (*) производную: $y' = C_1 \cdot 3e^{3x} - C_2 \cdot 3e^{-3x} + \frac{1}{3}e^{3x} + xe^{3x}$.

Подставим вместо y' – ноль, вместо x – ноль:

$y'(0)=0$

$$0 = 3C_1 - 3C_2 + \frac{1}{3} + 0.$$ Получаем систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 3C_1 - 3C_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \Big| \cdot 3 \quad 6C_1 = 3 - \frac{1}{3} \quad 6C_1 = \frac{8}{3} \quad C_1 = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \quad C_2 = 1 - C_1 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Следовательно, решение задачи Коши для уравнения $y'' - 9y = 2e^{3x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$ будет выглядеть след. образом:

$$y_{\text{частн. решение}} = \frac{4}{9}e^{3x} + \frac{5}{9}e^{-3x} + \frac{1}{3}xe^{3x}$$ – решение задачи Коши

Домашнее задание

1. Типовой расчет С4.
2. Подготовка к контрольной работе ПК-4 «Дифференциальные уравнения».