Физические приложения двойных интегралов

Масса и статические моменты пластины

Предположим, что плоская пластина изготовлена из неоднородного материала и занимает область R в плоскости Oxy. Пусть плотность пластины в точке (x, y) в области R равна $\rho(x, y)$. Тогда *масса пластины* выражается через двойной интеграл в виде

$$m = \iint\limits_R \rho(x, y)\, dA.$$

Статический момент пластины относительно оси Ox определяется формулой

$$M_x = \iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA.$$

Аналогично находится *статический момент пластины относительно оси Oy*:

$$M_y = \iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA.$$

Координаты *центра масс пластины*, занимающей область R в плоскости Oxy с плотностью, распределенной по закону $\rho(x, y)$, описываются формулами

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA = \frac{\iint\limits_R x\rho(x, y)\, dA}{\iint\limits_R \rho(x, y)\, dA},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA = \frac{\iint\limits_R y\rho(x, y)\, dA}{\iint\limits_R \rho(x, y)\, dA}.$$

Для однородной пластины с плотностью $\rho(x, y) = 1$ для всех (x, y) в области R центр масс определяется только формой области и называется *центроидом*.

Моменты инерции пластины

Момент инерции пластины относительно оси Ox выражается формулой

$$I_x = \iint\limits_R y^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Аналогично вычисляется *момент инерции пластины относительно оси Oy*:

$$I_y = \iint\limits_R x^2 \rho(x, y)\, dA.$$

Полярный момент инерции пластины равен

$$I_0 = \iint\limits_R \left(x^2 + y^2\right) \rho(x, y)\, dA.$$

Заряд пластины

Предположим, что электрический заряд распределен по области R в плоскости Oxy и его плотность распределения задана функцией $\sigma(x, y)$. Тогда полный *заряд пластины* Q определяется выражением

$$Q = \iint\limits_R \sigma(x, y)\, dA.$$

Среднее значение функции

Приведем также формулу дял расчета среднего значения некоторой распределенной величины. Пусть $f(x, y)$ является непрерывной функцией в замкнутой области R в плоскости Oxy. Среднее значение μ функции $f(x, y)$ в области R определяется формулой

$$\mu = \frac{1}{S} \iint\limits_R f(x, y)\, dA,$$

где $S = \iint\limits_R dA$ – площадь области интегрирования R.

Пример 1

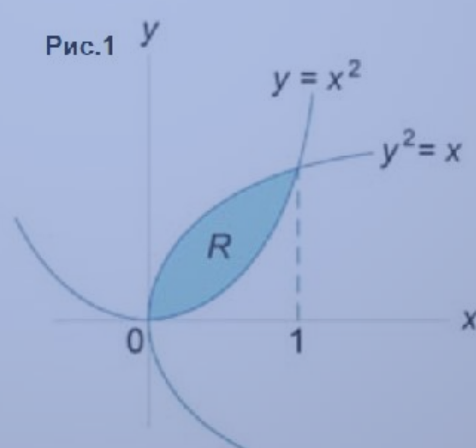
Определить координаты центра тяжести однородной пластины, образованной параболами $y^2 = x$ и $y = x^2$.

Решение.
Заданная пластина имеет форму, показанную на рисунке 1. Поскольку пластина однородна, то можно положить $\rho(x, y) = 1$. Тогда масса пластины равна

$$m = \iint\limits_R dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\right] dx = \int\limits_0^1 \left[y|_{x^2}^{\sqrt{x}}\right] dx = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\, dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x^2\right) dx$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Рис.1



Найдем теперь статические моменты относительно осей Ox и Oy.

$$M_x = \iint\limits_R y\,dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} y\,dy \right] dx = \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \left(x - x^4 \right) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20},$$

$$M_y = \iint\limits_R x\,dA = \int\limits_0^1 \left[\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right] x\,dx = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) x\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^3 \right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{3}{20}.$$

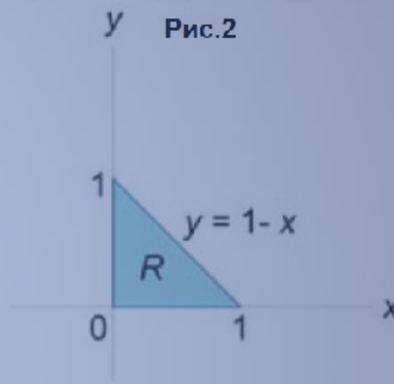
Вычисляем координаты центра масс.

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{20}.$$

Пример 2

Вычислить моменты инерции треугольника, ограниченного прямыми $x+y=1$, $x=0$, $y=0$ (рисунок 2) и имеющего плотность $\rho(x,y)=xy$.

Рис.2



Решение.

Найдем момент инерции пластины относительно оси Ox :

$$I_x=\iint_R y^2\rho(x,y)\,dxdy=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}y^2xy\,dy\right]dx=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}y^3dy\right]xdx=\int_0^1\left[\left(\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^{1-x}\right]xdx$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(1-x)^4xdx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(1-4x+6x^2-4x^3+x^4\right)xdx=\frac{1}{4}\int_0^1\left(x-4x^2+6x^3-4x^4+x^5\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+\frac{6x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}+\frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{6}\right)=\frac{49}{120}.$$

Аналогично вычислим момент инерции относительно оси Oy :

$$I_y = \iint\limits_R x^2\rho\left(x,y\right)dxdy = \int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{1-x} x^2xydy\right]dx = \int\limits_0^1\left[\int\limits_0^{1-x} ydy\right]x^3dx = \int\limits_0^1\left[\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}\right]x^3dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^2x^3dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(1-2x+x^2\right)x^3dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(x^3-2x^4+x^5\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{120}.$$

Пример 3

Электрический заряд распределен по площади диска $x^2+y^2=1$ таким образом, что его поверхностная плотность равна $\sigma(x,y)=1+x^2+y^2\ \left(\text{Кл}/\text{м}^2\right)$. Вычислить полный заряд диска.

Решение.

В полярных координатах область, занятая диском, описывается множеством $\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1, 0\le\theta\le 2\pi\}$. Полный заряд будет равен

$$Q=\iint\limits_R \sigma(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^1\left(1+r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta\right)rdr\right]d\theta=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^1\left(1+r^2\right)rdr$$

$$=2\pi\int\limits_0^1\left(r+r^3\right)dr=2\pi\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=2\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3\pi}{2}\ (\text{Кл}).$$

Определение и свойства тройных интегралов

Определение тройного интеграла

Формально определение тройного интеграла можно ввести аналогично двойному интегралу как предел суммы Римана. Начнем с простейшего случая, когда область интегрирования U имеет вид параллелепипеда $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ (рисунок 1).

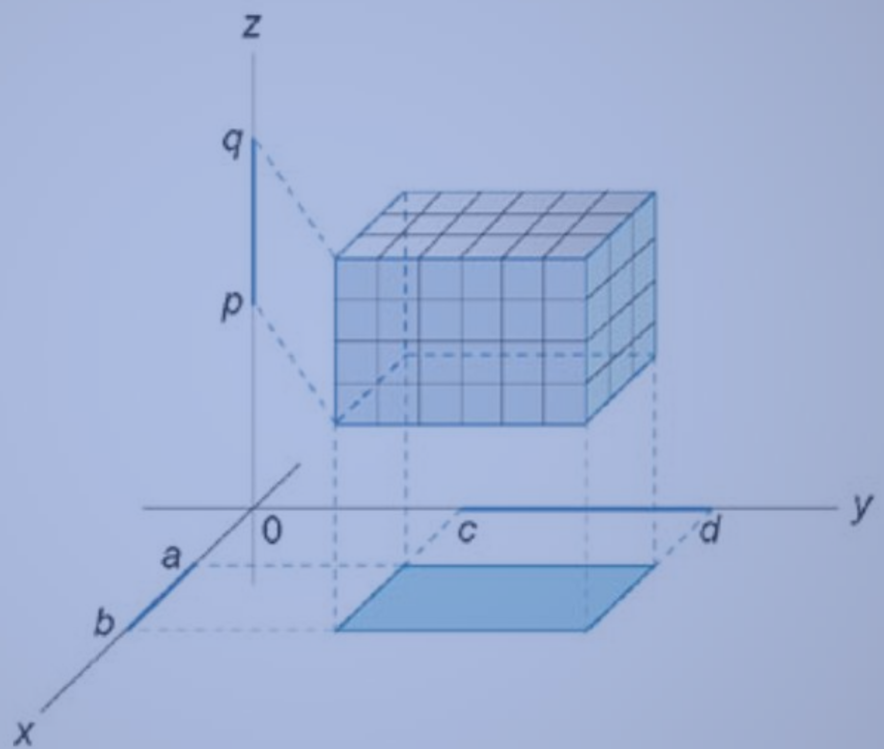


Рис.1

Пусть множество чисел $\{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ разбивает отрезок $[a, b]$ на малые интервалы, так что справедливо соотношение

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_{m-1} < x_m = b.$$

Аналогично построим разбиение отрезка $[c, d]$ вдоль оси Oy и $[p, q]$ вдоль оси Oz :

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_{n-1} < y_n = d,$$

$$p = z_0 < z_1 < z_2 < \ldots < z_k < \ldots < z_{\ell-1} < z_\ell = q.$$

Сумма Римана функции $f(x, y, z)$ над разбиением $[a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} f\left(u_i, v_j, w_k\right) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k.$$

Здесь $\left(u_i, v_j, w_k\right)$ – некоторая точка в параллелепипеде $(x_{i-1}, x_i) \times \left(y_{j-1}, y_j\right) \times (z_{k-1}, z_k)$, а приращения равны

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \;\; \Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \;\; \Delta z_k = z_k - z_{k-1}.$$

Тройной интеграл от функции $f(x,y,z)$ в параллелепипеде $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$ определяется как предел суммы Римана, при котором максимальное значение приращений Δx_i, Δy_j и Δz_k стремятся к нулю:

$$\iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} f(x,y,z)\,dV = \lim_{\substack{\max\Delta x_i\to 0\\ \max\Delta y_j\to 0\\ \max\Delta z_k\to 0}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} f\left(u_i,v_j,w_k\right)\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k.$$

Чтобы определить тройной интеграл в произвольной области U, выберем параллелепипед $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, включающий заданную область U. Введем функцию $g(x,y,z)$, такую, что

$$\begin{cases} g(x,y,z)=f(x,y,z)\,, & \text{если}\ \ f(x,y,z)\in U\\ g(x,y,z)=0, & \text{если}\ \ f(x,y,z)\notin U \end{cases}.$$

Тогда тройной интеграл от функции функции $f(x,y,z)$ в произвольной области U определяется в виде:

$$\iiint\limits_{U} f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{[a,b]\times[c,d]\times[p,q]} g(x,y,z)\,dV.$$

Основные свойства тройного интеграла

Пусть функции $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ интегрируемы в области U.

Тогда справедливы следующие свойства:

1. $\iiint\limits_U [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

2. $\iiint\limits_U [f(x,y,z)-g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV - \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

3. $\iiint\limits_U kf(x,y,z)\,dV = k\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV$, где k - константа;

4. Если $f(x,y,z) \le g(x,y,z)$ в любой точке области U, то $\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV \le \iiint\limits_U g(x,y,z)\,dV;$

5. Если область U является объединением двух непересекающихся областей U_1 и U_2, то

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{U_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{U_2} f(x,y,z)\,dV;$$

6. Пусть m - наименьшее и M - наибольшее значение непрерывной функции $f(x, y, z)$ в области U. Тогда для тройного интеграла справедлива оценка:

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dV \leq M \cdot V,$$

где V - объем области интегрирования U.

7. *Теорема о среднем значении тройного интеграла.* Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области U, то существует точка $M_0 \in U$, такая, что

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dV = f(M_0) \cdot V,$$

где V - объем области U.

Пример 1

Оценить максимальное значение тройного интеграла

$$I = \iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{100 - x^2 - y^2 - z^2}},$$

где U представляет собой шар с центром в начале координат и радиусом $R = 6$.

Решение.

Уравнение шара имеет вид $x^2 + y^2 + z^2 \le 36.$

Используя свойство 6, можно записать $I \le M \cdot V,$

где объем шара V равен

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 288\pi.$$

Максимальное значение M подынтегральной функции равно

$$M = \frac{1}{\sqrt{100 - 36}} = \frac{1}{8}.$$

Отсюда получаем верхнюю оценку тройного интеграла:

$$I \le \frac{1}{8} \cdot 288\pi = 36\pi.$$

Пример 2

Оценить максимальное и минимальное значение тройного интеграла

$$\iiint\limits_U \frac{dV}{\ln(e+x+y+z)},$$

где область U является параллелепипедом:

$$U = \{(x, y, z) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le z \le 3\}.$$

Решение.

Сначала вычислим объем области интегрирования U: $V = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$

Оценка интеграла выглядит как $\quad m \cdot V \le I \le M \cdot V.$

Здесь минимальное значение m подынтегральной функции равно

$$m = \frac{1}{\ln(e+1+2+3)} = \frac{1}{\ln(e+6)}.$$

Соответственно, максимальное значение M составляет

$$M = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Таким образом, оценка интеграла имеет вид

$$\frac{6}{\ln(e+6)} \le I \le 6.$$

Тройные интегралы в декартовых координатах

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Рассмотрим случай, когда область интегрирования U является *элементарной относительно оси Oz*, т.е. любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области U не более, чем в двух точках. Пусть область U ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, а сверху – поверхностью $z = z_2(x, y)$ (рисунок 1). Проекцией тела U на плоскость Oxy является область D (рисунок 2). Будем предполагать, что функции $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ непрерывны в области D.

Рис.1

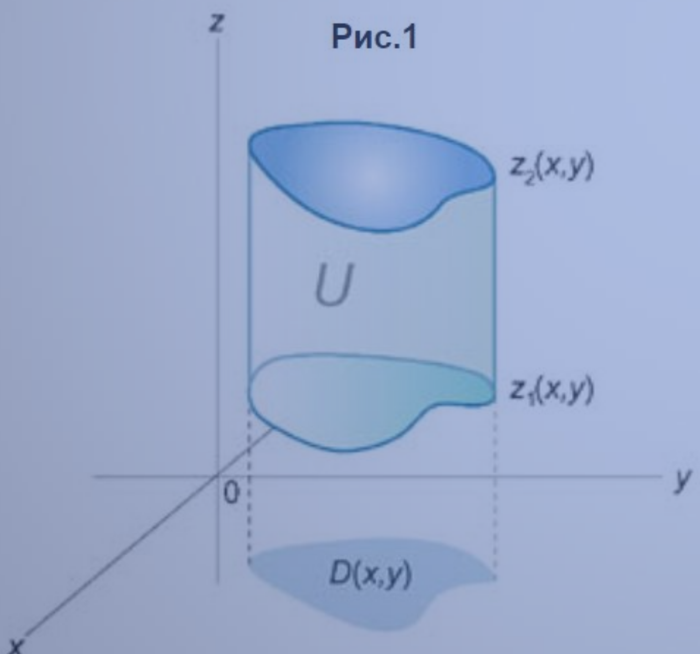
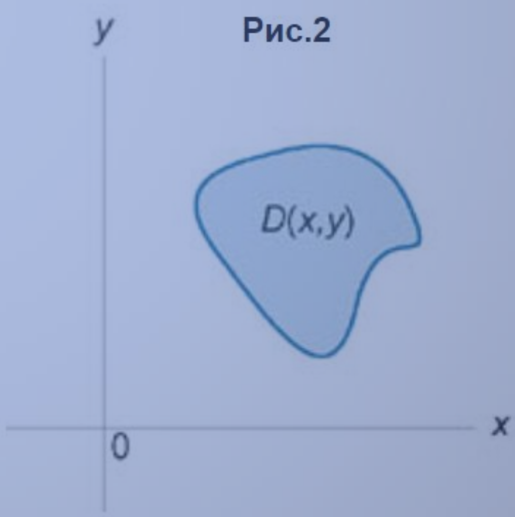


Рис.2



Тогда для любой непрерывной в области U функции $f(x, y, z)$ можно записать соотношение

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_D \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dA.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится к вычислению двойного интеграла, в котором подынтегральной функцией является однократный интеграл. В рассмотренном случае сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной z, а затем – двойной интеграл в области D по переменным x и y.

Если область $D(x, y)$ является областью типа I , т.е. ограничена линиями

$$x = a, \;\; x = b, \;\; y = f_1(x)\,, \;\; y = f_2(x)\,,$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$ – непрерывные функции в интервале $[a, b]$ и $f_1(x) \le f_2(x)$, то, записывая двойной интеграл в виде повторного, получаем

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (1)$$

В другом случае, когда область $D(x,y)$ относится к типу II (является элементарной относительно оси Ox) и ограничена линиями

$$y=c,\;\; y=d,\;\; x=\varphi_1(y),\;\; x=\varphi_2(y),$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y)$, – непрерывные на отрезке $[c,d]$ функции, причем $\varphi_1(y) \le \varphi_2(y)$, тройной интеграл представляется в виде

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dV = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} dx \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) называются *формулами сведения тройного интеграла к повторному*.

В частном случае, когда область интегрирования U представляет собой прямоугольный параллелепипед $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$, тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_U f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)\,dz.$$

Если исходная область интегрирования U, более сложная, чем рассмотренная выше, то ее нужно разбить на конечное число более простых областей, в которых уже можно вычислить тройные интегралы методом сведения к повторным.

Пример 1

Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^y xyzdxdydz.$$

Решение.

Найдем последовательно все три интеграла:

$$I = \int\limits_0^2 \int\limits_0^z \int\limits_0^y xyzdxdydz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z dy \int\limits_0^y xyzdz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z dy \left[\left(\frac{x^2yz}{2} \right) \Bigg|_{x=0}^{x=y} \right] = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z \frac{y^3z}{2} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z y^3zdy = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 dz \left[\left(\frac{y^4z}{4} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=z} \right] = \frac{1}{2} \int\limits_0^2 \frac{z^5}{4} dz = \frac{1}{8} \int\limits_0^2 z^5dz = \frac{1}{8} \left(\frac{z^6}{6} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{64}{48} = \frac{4}{3}.$$

Пример 2

Вычислить интеграл

$$\iiint\limits_U (1-x)\,dxdydz,$$

где область U расположена в первом октанте ниже плоскости $3x+2y+z=6$.

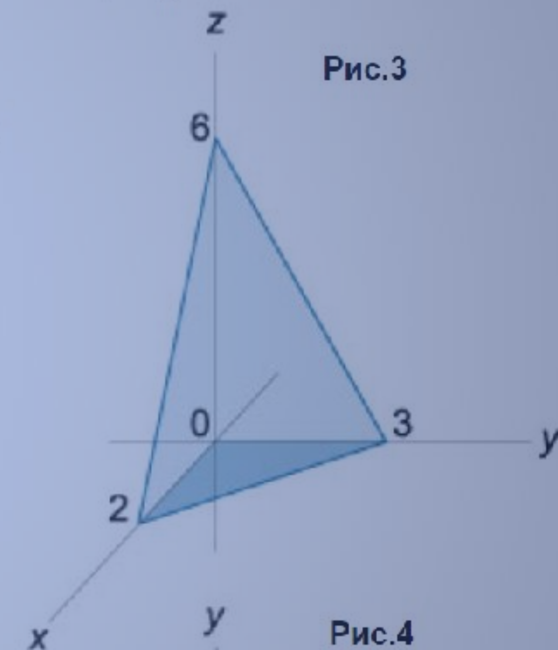
Решение.

Записывая уравнение плоскости $3x+2y+z=6$ в отрезках:

$$3x+2y+z=6, \;\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1,$$

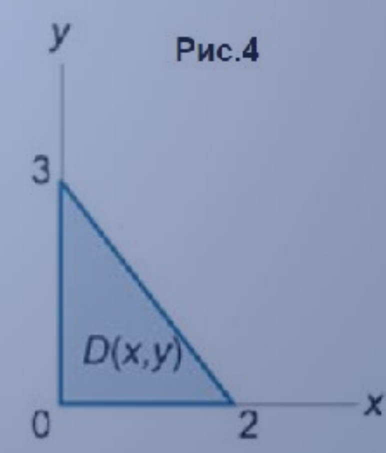
изобразим область интегрирования U (рисунок 3).

Рис.3



Пределы интегрирования по z изменяются от $z=0$ до $z=6-3x-2y$. Рассматривая проекцию D в плоскости Oxy, находим, что переменная y изменяется от $y=0$ до $y=3-\frac{3}{2}x$ (рисунок 4). При этом переменная x "пробегает" от 0 до 2.

Рис.4



Итак, тройной интеграл выражается через повторный в виде

$$I = \iiint\limits_U (1-x)\,dxdydz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int\limits_0^{6-3x-2y} (1-x)\,dz.$$

Вычисляем последовательно все три интеграла и находим ответ:

$$I = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \int\limits_0^{6-3x-2y} (1-x)\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} dy \left[(z - zx)\Big|_{z=0}^{z=6-3x-2y} \right]$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} [6-3x-2y-(6-3x-2y)\,x]\,dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(6-3x-2y-6x+3x^2+2xy\right) dy$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{3-\frac{3}{2}x} \left(6-9x-2y+3x^2+2xy\right) dy = \int\limits_0^2 dx \left[\left(6y - 9xy - \frac{2y^2}{2} + 3x^2y + \frac{2xy^2}{2}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=3-\frac{3}{2}x} \right]$$

$$= \int\limits_0^2 \left(9 - 18x + \frac{45}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^3\right) dx = \left(9x - \frac{18}{2}x^2 + \frac{45}{12}x^3 - \frac{9}{16}x^4\right)\Bigg|_0^2 = 18 - 36 + 30 - 9 = 3.$$

Пример 3

Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_U xy^2z^3dxdydz,$$

где область U (рисунок 5) ограничена поверхностями

$$z = xy,\ \ y = x,\ \ x = 0,\ \ x = 1,\ \ z = 0.$$

Рис.5

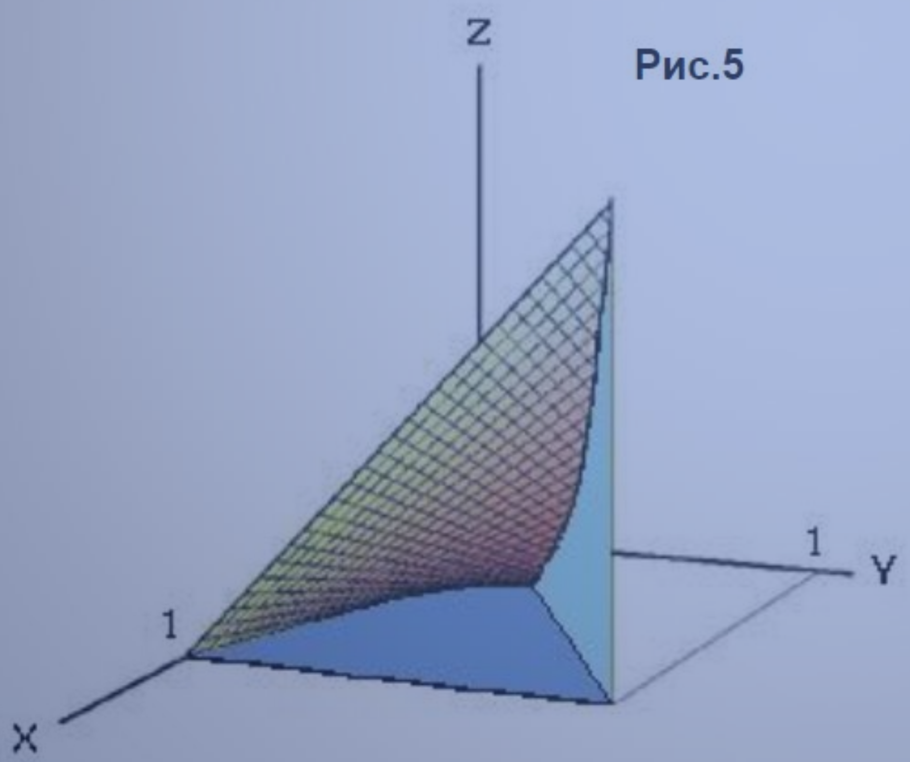
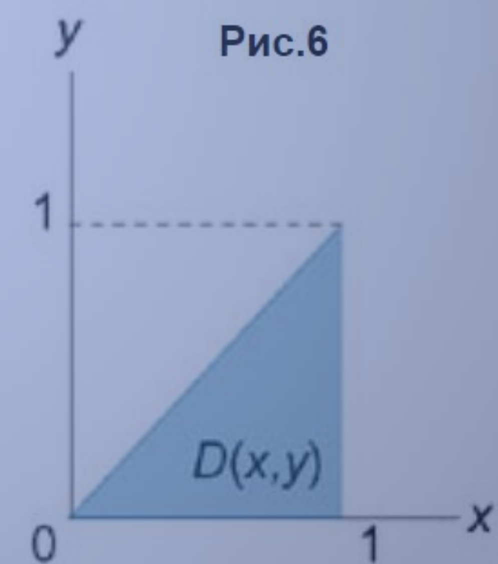


Рис.6



Решение.

Проекция области U на плоскость Oxy имеет вид, показанный на рисунке 6. Учитывая это, найдем соответствующие повторные интегралы:

$$I = \iiint\limits_U xy^2z^3dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} xy^2z^3dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left[\left(\frac{xy^2z^4}{4} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=xy} \right]$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \left(xy^2 \frac{x^4y^4}{4} \right) dy = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x x^5y^6dy = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 dx \left[\left(\frac{x^5y^7}{7} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=x} \right] = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 \left(x^5 \frac{x^7}{7} \right) dx$$

$$= \frac{1}{28} \int\limits_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{28} \left(\frac{x^{13}}{13} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{364}.$$

Пример 4

Выразить тройной интеграл $\iiint\limits_U dxdydz$ через повторные интегралы шестью различными способами. Область U расположена в первом октанте и ограничена цилиндром $x^2+z^2=4$ и плоскостью $y=3$ (рисунок 7). Найти значение интеграла.

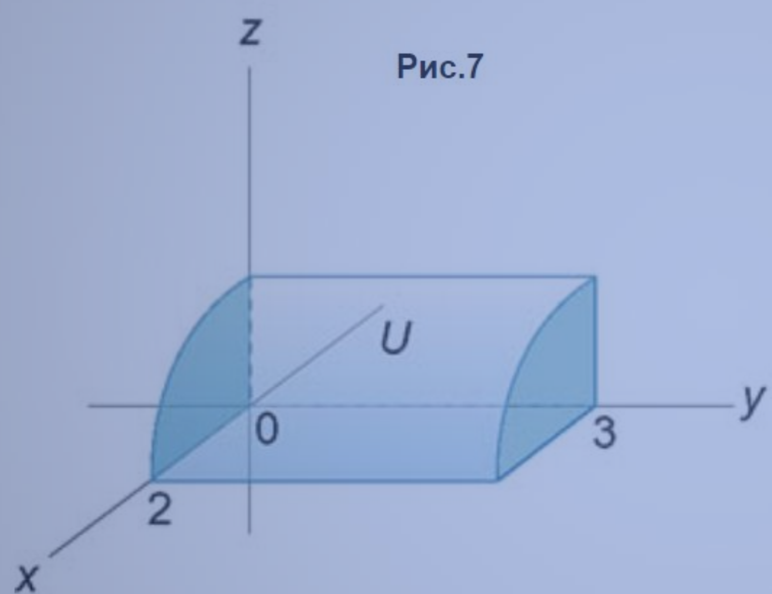


Рис.7

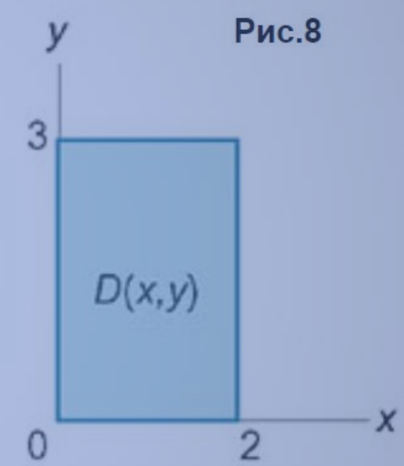


Рис.8

Решение.

Если порядок интегрирования имеет вид $z-y-x$, то повторный интеграл выглядит как

$$I_1=\iiint\limits_U dxdydz=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz.$$

Аналогично записывается повторный интеграл для последовательности интегрирования $z-x-y$:

$$I_2=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz.$$

Теперь рассмотрим случай $x-y-z$, т.е. когда первый внутренний интеграл берется по переменной x. Тогда

$$I_3=\int\limits_0^2 dz\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} dx.$$

Поскольку проекция тела на плоскость Oyz представляет собой прямоугольник (рисунок 8), то меняя порядок интегрирования по y и z, получаем

$$I_4=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^2 dz\int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} dx.$$

Наконец, повторный интеграл при интегрировании в порядке $y-x-z$ (начиная с внутреннего интеграла) имеет вид:

$$I_5 = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^{\sqrt{4-z^2}} dx \int\limits_0^3 dy.$$

Последний шестой вариант записывается в виде:

$$I_6 = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \int\limits_0^3 dy.$$

Мы можем использовать любой из шести повторных интегралов, чтобы вычислить значение тройного интеграла. Например, используя последний интеграл, получаем:

$$I = I_6 = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \int\limits_0^3 dy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz \cdot \left[y\Big|_0^3 \right] = 3\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} dz = 3\int\limits_0^2 dx \left[z\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} \right]$$

$$= 3\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$$

Сделаем замену:

$$x = 2\sin t, \quad \Rightarrow dx = 2\cos t dt,$$

$$x = 0, \quad \Rightarrow t = 0,$$

$$x = 2, \quad \Rightarrow \sin t = 1, \quad \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Находим окончательный ответ:

$$I = 3\int\limits_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 - (2\sin t)^2} \cdot 2\cos t dt = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$= 12\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = 6\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi.$$

Нетрудно проверить, что данное значение в точности равно $\frac{1}{4}$ объема цилиндра, по которому проводилось интегрирование.

Замена переменных в тройных интегралах

При вычислении тройного интеграла, как и двойного, часто удобно сделать замену переменных. Это позволяет упростить вид области интегрирования или подынтегральное выражение.

Пусть исходный тройной интеграл задан в декартовых координатах x, y, z в области U :

$$\iiint\limits_{U} f(x, y, z)\, dxdydz.$$

Требуется вычислить данный интеграл в новых координатах u, v, w. Взаимосвязь старых и новых координат описывается соотношениями:

$$x = \varphi(u, v, w), \;\; y = \psi(u, v, w), \;\; z = \chi(u, v, w).$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1. Функции φ, ψ, χ непрерывны вместе со своими частными производными;
2. Существует взаимно-однозначное соответствие между точками области интегрирования U в пространстве xyz и точками области U' в пространстве uvw;
3. *Якобиан преобразования* $I\left(u,v,w\right)$, равный

$$I\left(u,v,w\right)=\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(u,v,w\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix},$$

   отличен от нуля и сохраняет постоянный знак всюду в области интегрирования U.

Тогда *формула замены переменных в тройном интеграле* записывается в виде:

$$\iiint\limits_{U} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\iiint\limits_{U'} f\left(\varphi\left(u,v,w\right),\psi\left(u,v,w\right),\chi\left(u,v,w\right)\right)\left|I\left(u,v,w\right)\right|dudvdw.$$

В приведенном выражении $\left|I\left(u,v,w\right)\right|$ означает абсолютное значение якобиана.

Пример 1

Найти объем области U, заданной неравенствами

$$0 \le z \le 2,\ \ 0 \le y + z \le 5,\ \ 0 \le x + y + z \le 10.$$

Решение.

Очевидно, что данная область является наклонным параллелепипедом. Удобно сделать такую замену переменных, при которой наклонный параллелепипед преобразуется в прямоугольный. В этом случае тройной интеграл сразу распадается на произведение трех однократных интегралов.

Сделаем следующую замену:

$$u = x + y + z,\ \ v = y + z,\ \ w = z.$$

Область интегрирования U' в новых переменных u, v, w ограничена неравенствами

$$0 \le u \le 10,\ \ 0 \le v \le 5,\ \ 0 \le w \le 2.$$

Объем тела равен

$$V = \iiint\limits_U dxdydz = \iiint\limits_{U'} \left| I\left(u, v, w\right) \right| dudvdw.$$

Вычислим якобиан данного преобразования. Чтобы не выражать старые переменные x, y, z через новые u, v, w, найдем сначала якобиан обратного преобразования:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

Тогда

$$|I(u,v,w)| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}\right| = 1.$$

Следовательно, объем тела равен

$$V = \iiint\limits_{U'} |I(u,v,w)|\, du dv dw = \iiint\limits_{U'} du dv dw = \int\limits_0^{10} du \int\limits_0^{5} dv \int\limits_0^{2} dw = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100.$$

Пример 2

Найти объем наклонного параллелепипеда, заданного неравенствами

$$0 \leq 2x - 3y + z \leq 5,$$

$$1 \leq x + 2y \leq 4,$$

$$-3 \leq x - z \leq 6.$$

Решение.
Введем новые переменные

$$u = 2x - 3y + z,\;\; v = x + 2y,\;\; w = x - z.$$

Вычислим якобиан обратного преобразования:

$$\frac{\partial\left(u, v, w\right)}{\partial\left(x, y, z\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по третьей строке, находим его значение:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 7 = -9.$$

Тогда модуль якобиана прямого преобразования равен

$$|I(u,v,w)| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\left(\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right)^{-1}\right| = \left|\frac{1}{-9}\right| = \frac{1}{9}.$$

Теперь легко вычислить объем тела:

$$V = \iiint\limits_{U'} |I(u,v,w)|\,dudvdw = \iiint\limits_{U'} \frac{1}{9} dudvdw = \frac{1}{9}\int\limits_0^5 du \int\limits_1^4 dv \int\limits_{-3}^6 dw = \frac{1}{9} \cdot 5 \cdot 3 \cdot 9 = 15.$$