Лекция № 1

Матрицы. Виды и действия над матрицами

План лекции

- Определение матрицы. Виды матриц.
- Линейные операции над матрицами.
- Умножение матриц.
- Определители второго и третьего порядков. Их свойства.
- Обратная матрица.
- Ранг матрицы.

Определение матрицы. Виды матриц.

- **Матрицей размера m×n** называется прямоугольная таблица чисел, содержащая *m* строк и *n* столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Каждый элемент матрицы имеет два индекса: *m* – номер строки и *n* – номер столбца. Например, в матрице

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ -3 & -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×4, $a_{11}=5$, $a_{23}=8$, $a_{34}=6$.

Часто используется краткая запись матрицы:

$$A=(a_{ik})_{m,n}$$

Матрица называется **квадратной** *n*-го порядка, если она состоит из *n* строк и *n* столбцов.

Матрица размера $1\times n$ называется **матрицей-строкой**, а матрица размера $m\times 1$ **матрицей-столбцом.**

Нулевой матрицей 0 заданного размера называется матрица, все элементы которой равны 0.

Единичной называется квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы , а столбцы – строками . Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$, то $$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **равными**, если $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

Линейные операции над матрицами.

Суммой матриц $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{m,n}$. Складываются матрицы только одинакового размера.

~~*Например*~~.

Найти сумму и разность матриц А и В:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Произведением матрицы *A* на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для умножения матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Любую матрицу можно умножить на любое число.

~~Например:~~

Умножая матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

на число 2, получим:

$$A \cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 & 0 \cdot 2 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел и выполняются свойства:

1 $A+B=B+A$

2 $A+0=A$

3 $A+(B+C)=(A+B)+C$

4 $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

5 $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

6 $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

Умножение матриц

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m,p}$ **на матрицу** $B=(b_{ik})_{p,n}$ называется матрица C размера $m\times n$ с элементами $c_{ik}=\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\cdot b_{jk}$,

$i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$.

Другими словами, для получения элемента, стоящего в i-той строке матрицы-произведения на k-том месте, следует вычислить сумму произведений элементов i-той строки матрицы A на k-тый столбец матрицы B.

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй.

Это условие согласования матриц при умножении.

Если оно нарушено, то матрицы перемножить нельзя.

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда $A \cdot B$ существует, а $B \cdot A$ нет.

Приведем еще ряд свойств операции умножения матриц. Если A, B и C - квадратные матрицы одного порядка, то справедливы равенства:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$

Например.

Найти произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй, следовательно их произведение существует:

$$\underset{2\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 0+3\cdot 4+0\cdot 2 \\ 1\cdot 1+0\cdot 1+4\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 4+4\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Список литературы

- Виленкин, И.В. Высшая математика для студентов экономических, естественно-научных специальностей вузов: учеб. пособие / И.В. Виленкин, В.М. Гробер. – Ростов н/Д: Феникс, 2002.
- Виленкин, И.В. Задачник по математике. Часть 1 / И.В. Виленкин, О.Е. Кудрявцев, М.М. Цвиль, С.И. Шабаршина. – Ростов н/Д: Российская таможенная академия, Ростовский филиал, 2007.
- Ермаков, В.И. Общий курс высшей математики для экономистов: учебник / Под общ. ред. В.И. Ермакова – М.: ИНФРА – М,2008.
- Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник / Н. Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Фридман. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2002.

Спасибо за внимание!