Взаимное расположение прямых в пространстве.

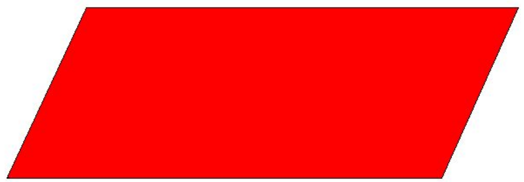
1. Понятие плоскости.

Представление о **плоскости** дает гладкая поверхность стола или стены.

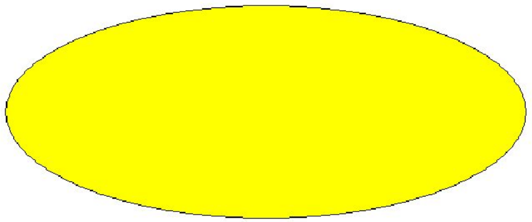
С точки зрения геометрии **плоскость** следует представлять как простирающуюся неограниченно во все стороны.

Плоскость изображается:

В виде параллелограмма

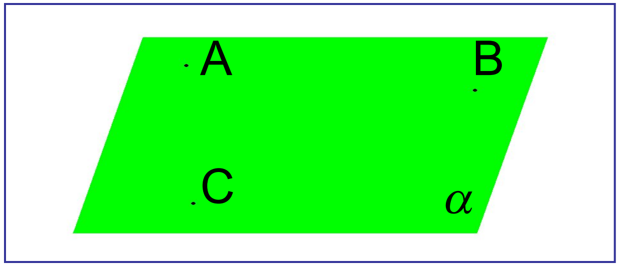


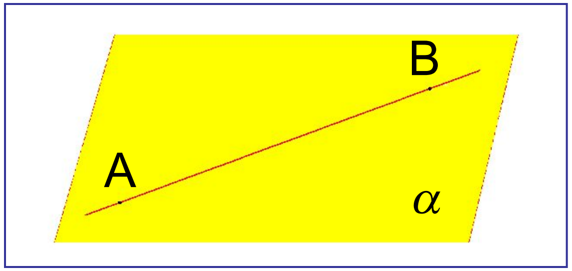
В виде овала(облачка)

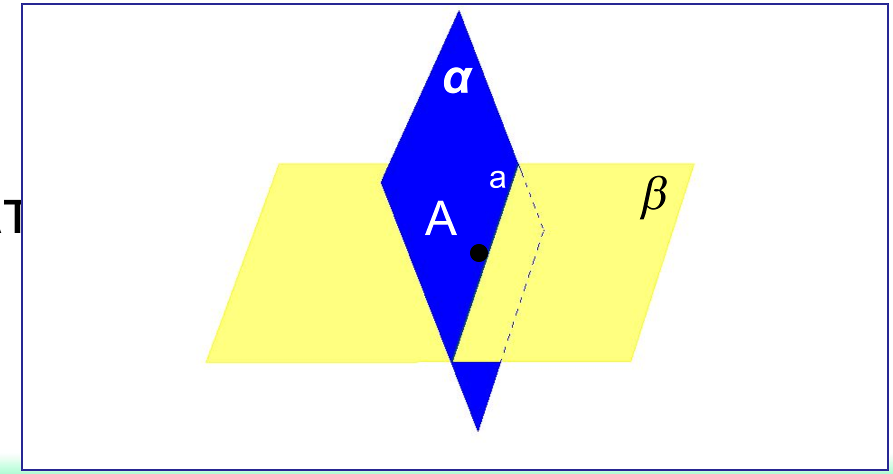


2. Аксиомы стереометрии.

- Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.
- Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

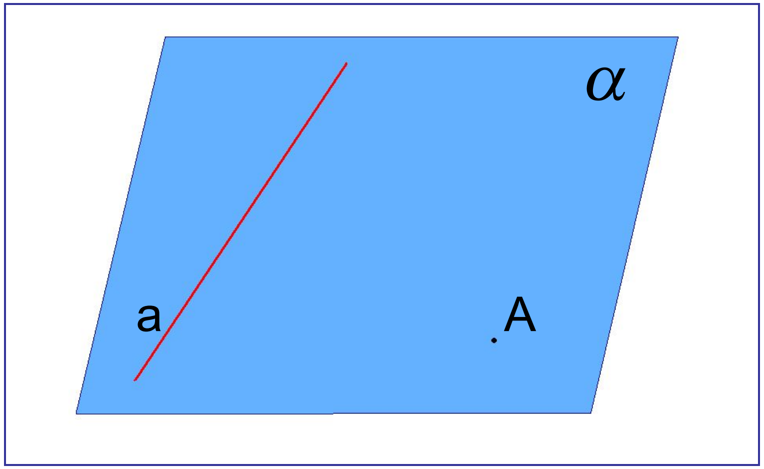




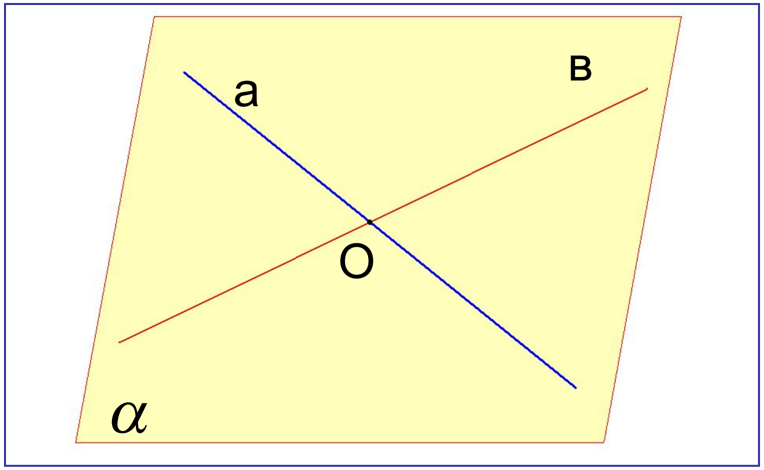


3. Следствия из аксиом стереометрии.

- Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.



- Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

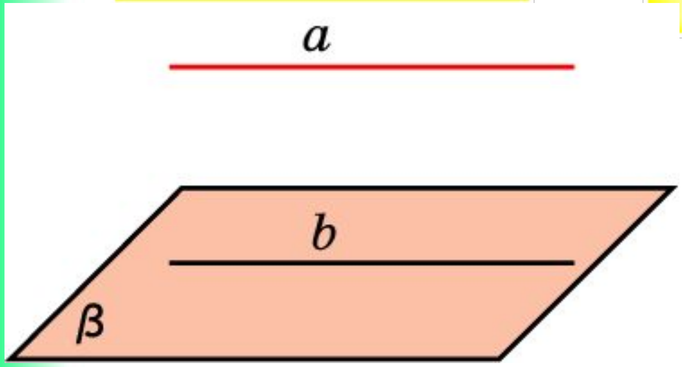


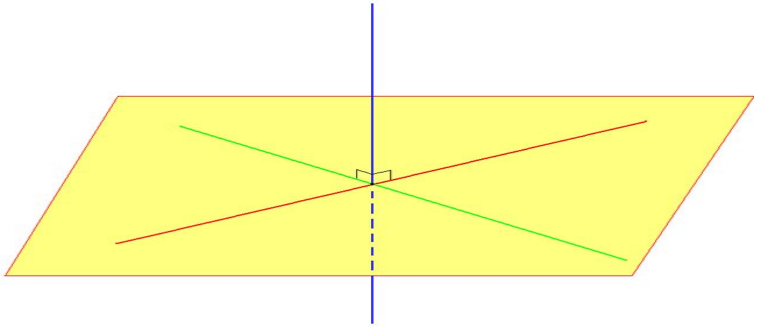
4. Взаимное расположение прямой и плоскости

Прямая лежит в плоскости.

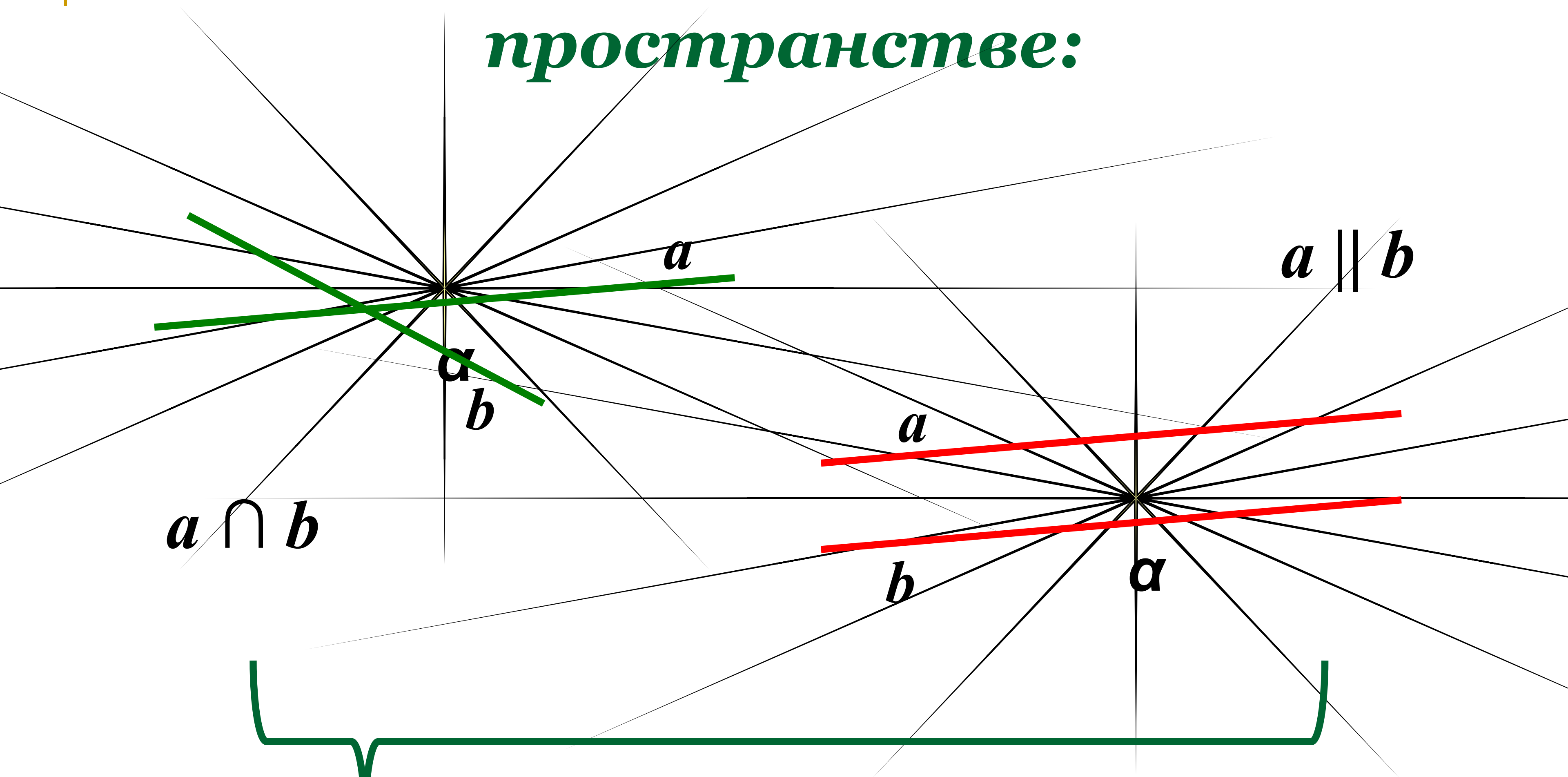
Прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т.е. пересекаются.

Прямая и плоскость не имеют общих точек.



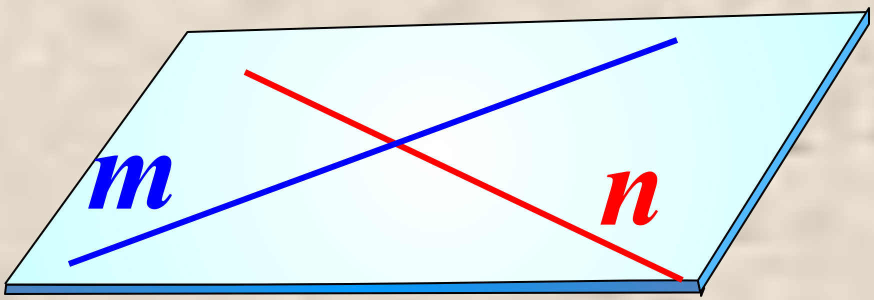


Расположение прямых в пространстве:

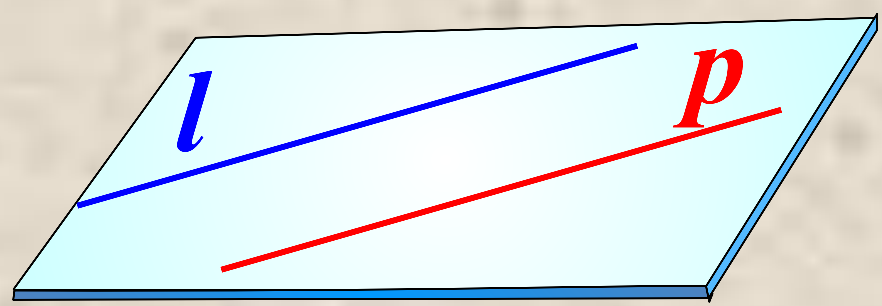


Лежат в одной плоскости!

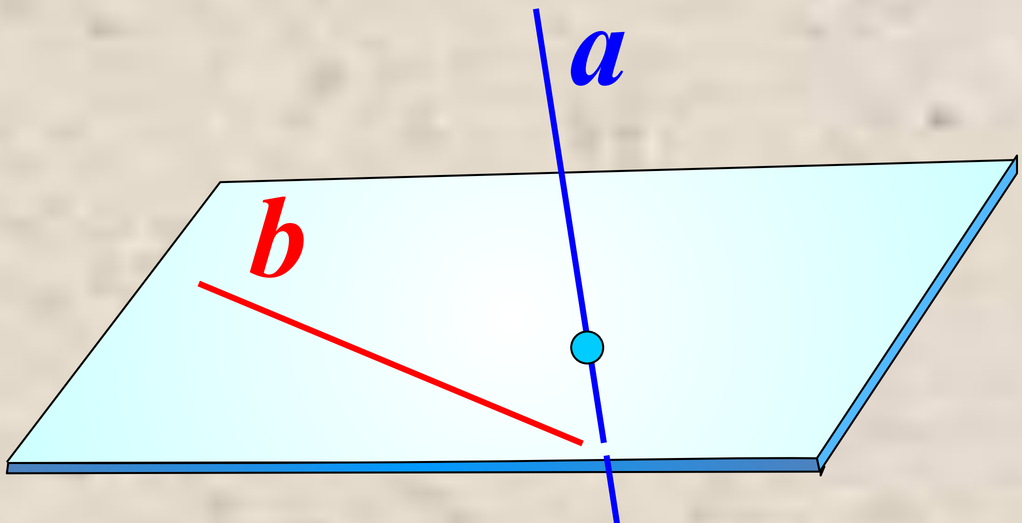
Три случая взаимного расположения прямых в пространстве



$n \cap m$

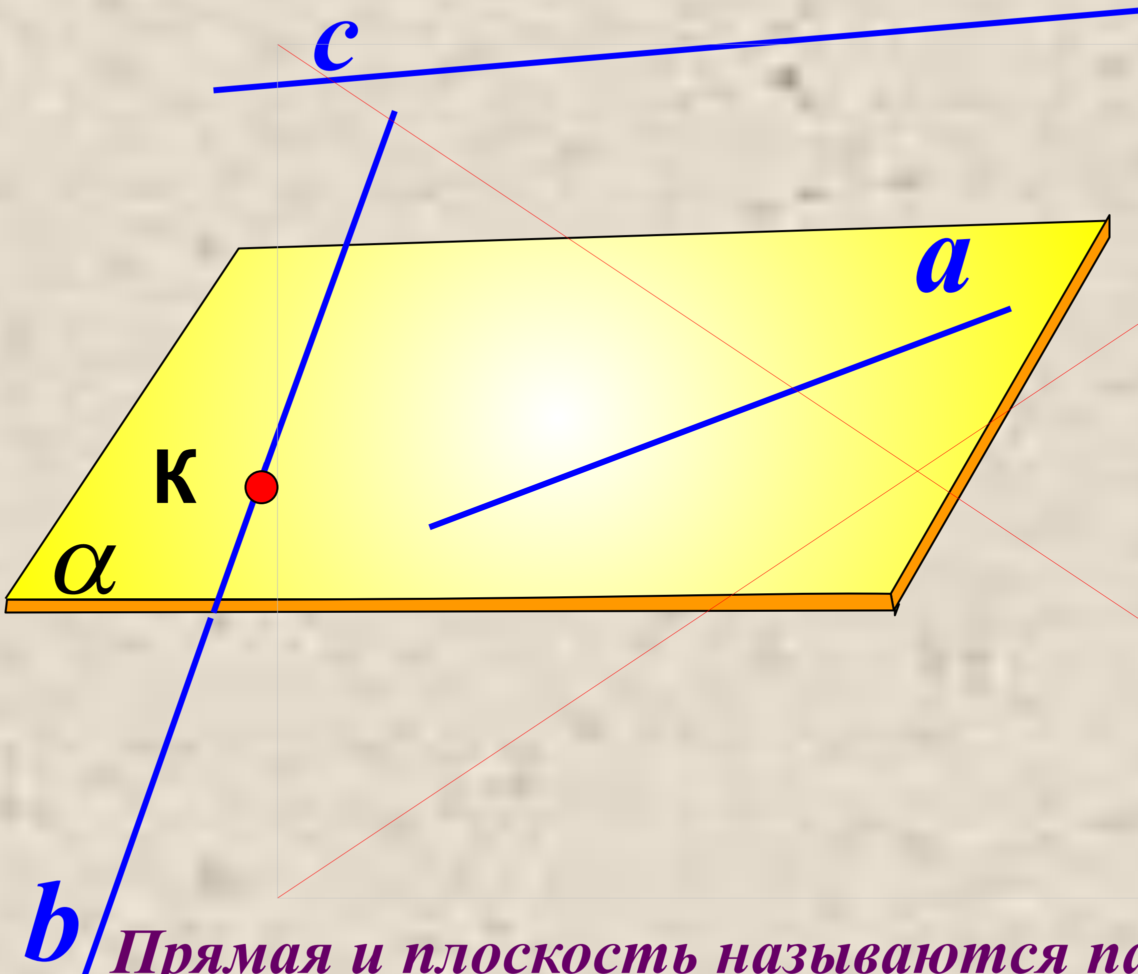


$l \parallel p$



$a \dot{-} b$

Три случая взаимного расположения прямой и плоскости



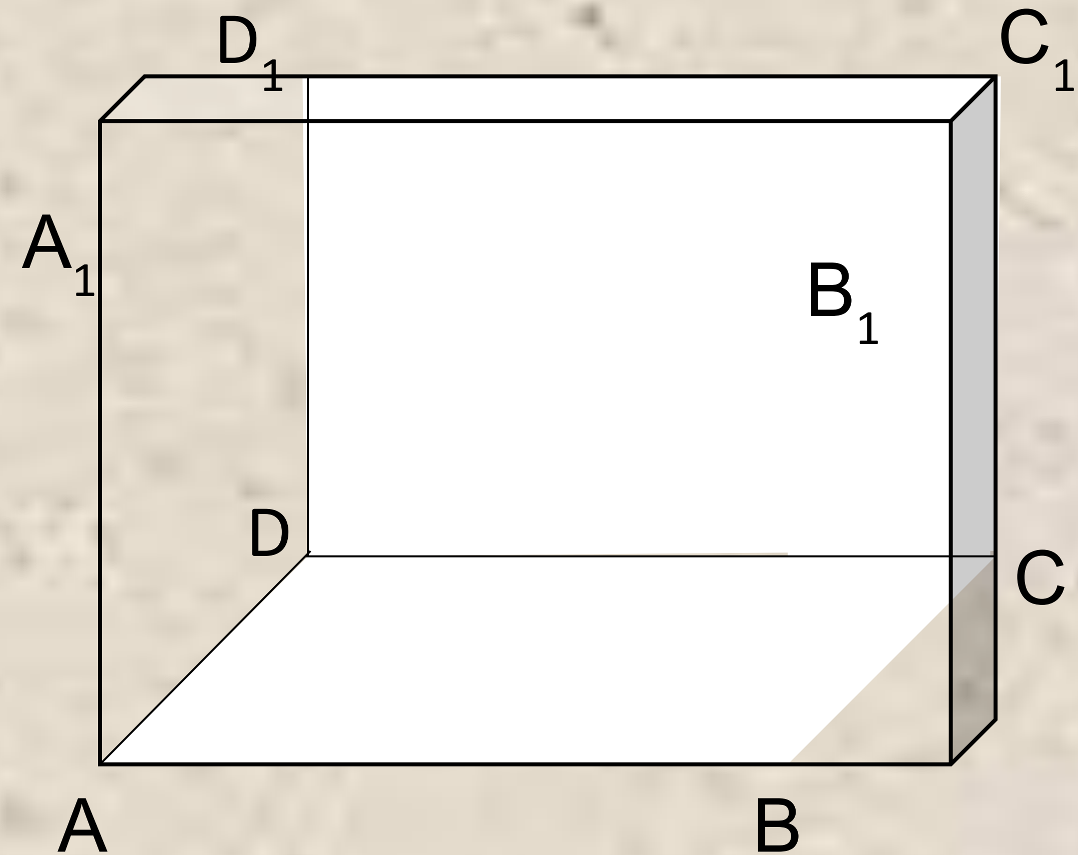
$$a \subset \alpha$$

$$b \cap \alpha = K$$

$$c \parallel \alpha$$

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Назовите прямые, параллельные данной плоскости



Параллельные прямые в пространстве

Опр. ***Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются***

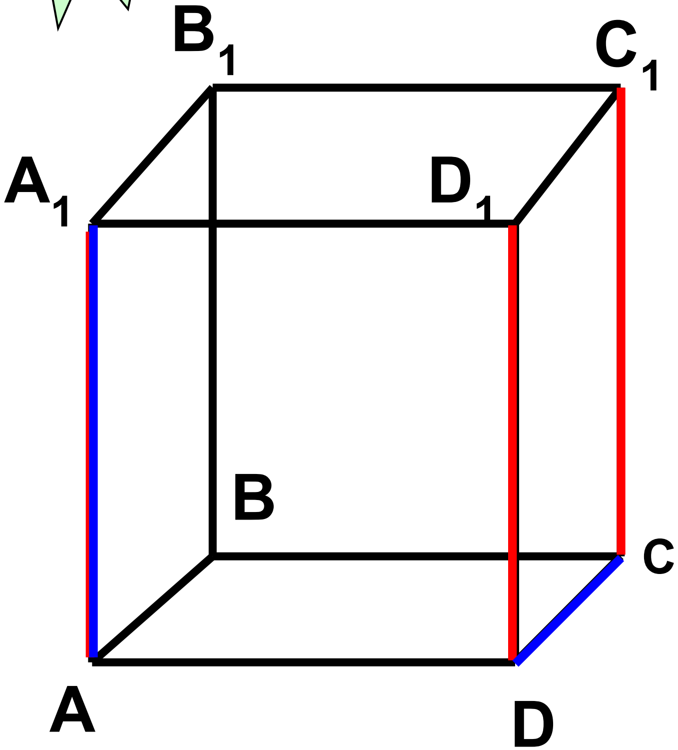
Теорема. ***Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой.***

Обозначения в геометрии

$a \parallel b$ – параллельность прямых
$a \perp b$ – перпендикулярность прямых
$a \cap b$ – пересечение прямых
$(ABCD)$ - плоскость
$a \parallel (ABCD)$ - параллельность прямой и плоскости

???

Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$



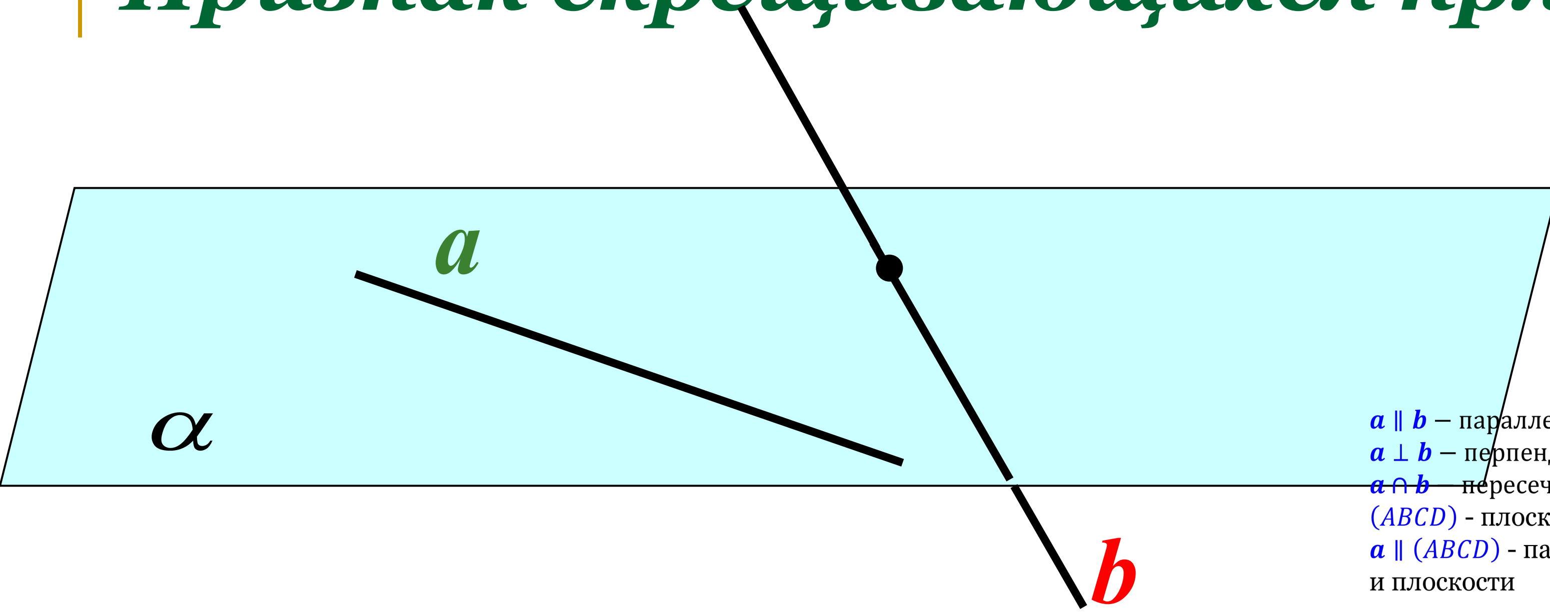
$AA_1 \parallel DD_1$, так как они лежат в плоскости (AA_1DD_1).

$AA_1 \parallel CC_1$, так как они лежат в плоскости (AA_1CC_1)

2. Являются ли AA_1 и DC параллельными? Они пересекаются?

Две прямые называются скрещивающимися, если через них нельзя провести плоскость.

Признак скрещивающихся прямых.

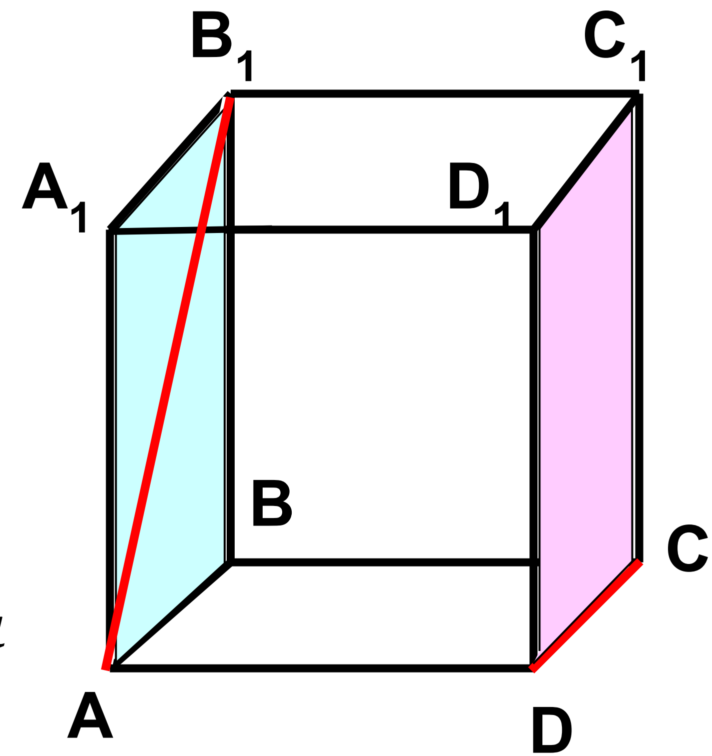


$\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ – параллельность прямых
$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ – перпендикулярность прямых
$\boldsymbol{a} \cap \boldsymbol{b}$ – пересечение прямых
$(ABCD)$ - плоскость
$\boldsymbol{a} \parallel (ABCD)$ - параллельность прямой и плоскости

- ***Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.***

Закрепление изученной теоремы:

1. Определить взаимное расположение прямых AB_1 и DC.
2. Указать взаимное расположение прямой DC и плоскости AA_1B_1B
3. Является ли прямая AB_1 параллельной плоскости DD_1C_1C?



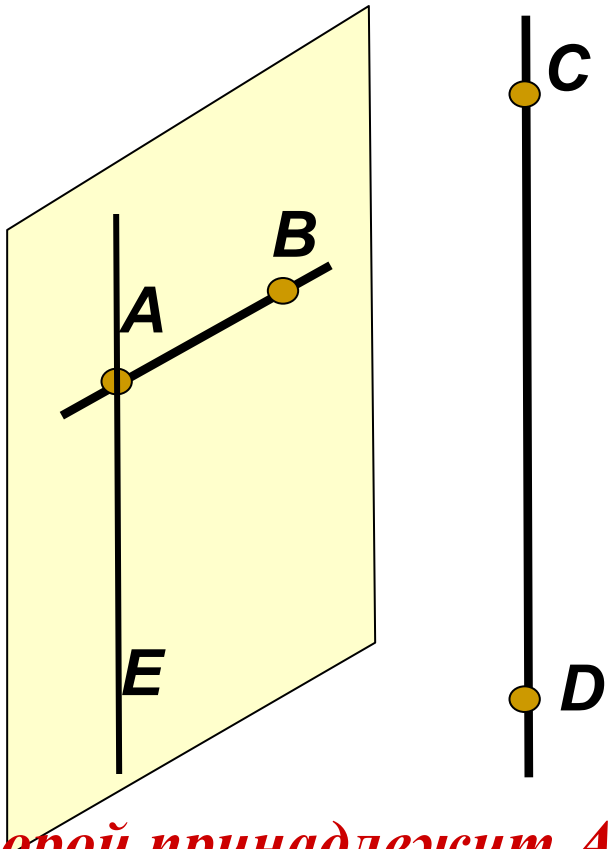
Теорема:

- ***Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна.***

Дано: АВ скрещивается с СD.

Построить α: АВ ⊂ α, СD || α.

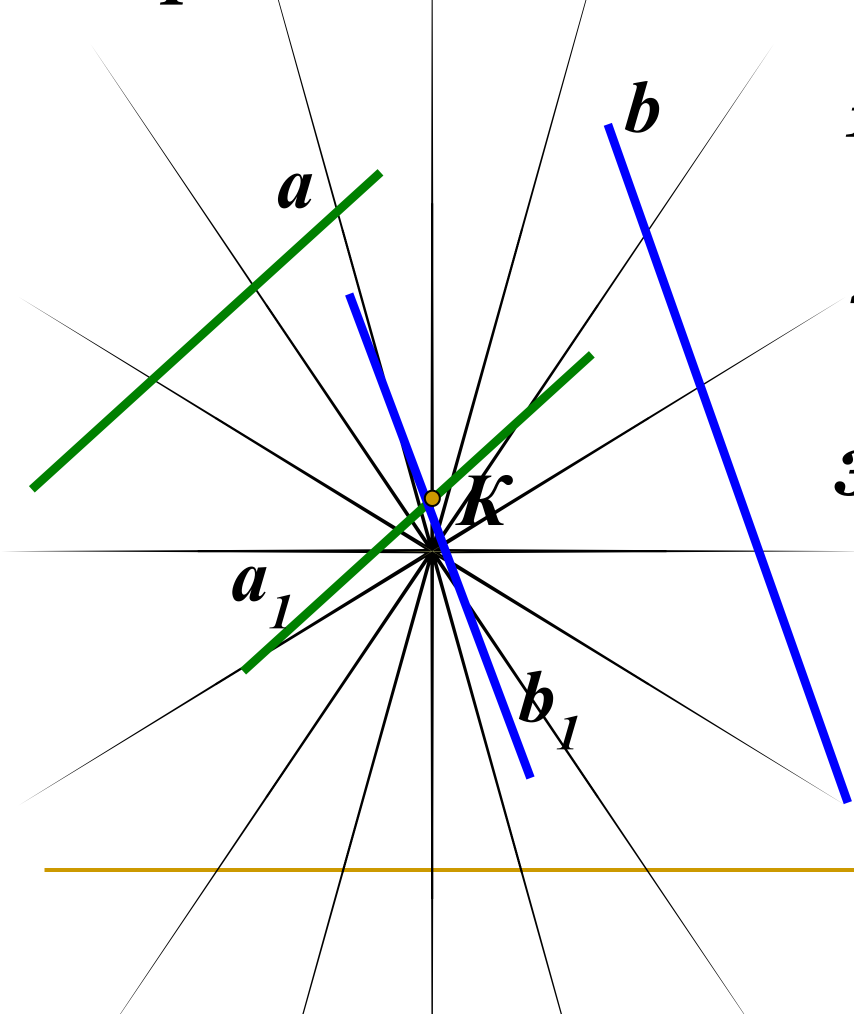
Доказать, что α – единственная.



1. ***Через точку А проведем прямую АЕ, АЕ || СD.***
2. ***Прямые АВ и АЕ пересекаются и образуют плоскость α. АВ ⊂ α, СD || α. α – единственная плоскость.***
3. ***Доказательство:***
   α – единственная по следствию из аксиом. Любая другая плоскость, которой принадлежит АВ, пересекает АЕ и, следовательно, прямую СD.

Задача.

- *Построить плоскость α, проходящую через точку К и параллельную скрещивающимся прямым a и b.*



Построение:

1. Через точку К провести прямую $a_1 \parallel a$.
2. Через точку К провести прямую $b_1 \parallel b$.
3. Через пересекающиеся прямые проведем плоскость α. α – искомая плоскость.

Задача

Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD$; $BN = ND$; $CP = PD$

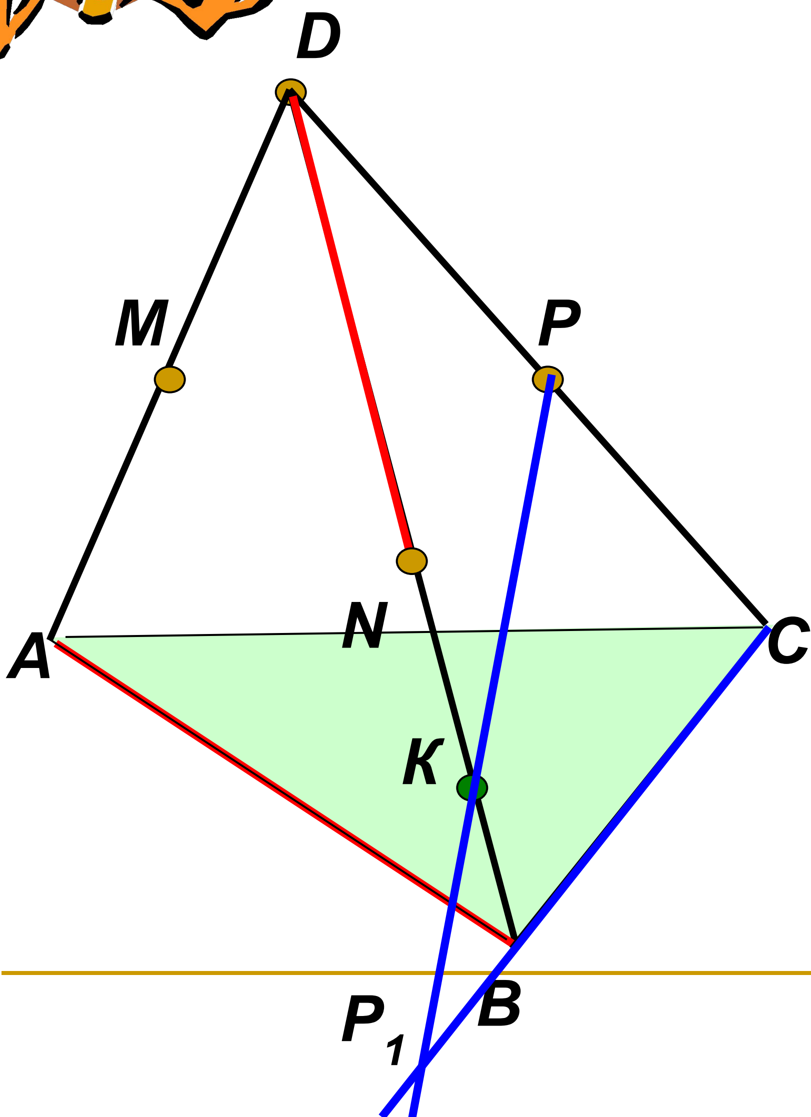
$К \in BN$.

Определить взаимное расположение прямых:

а) ND и AB

б) PK и BC

в) MN и AB



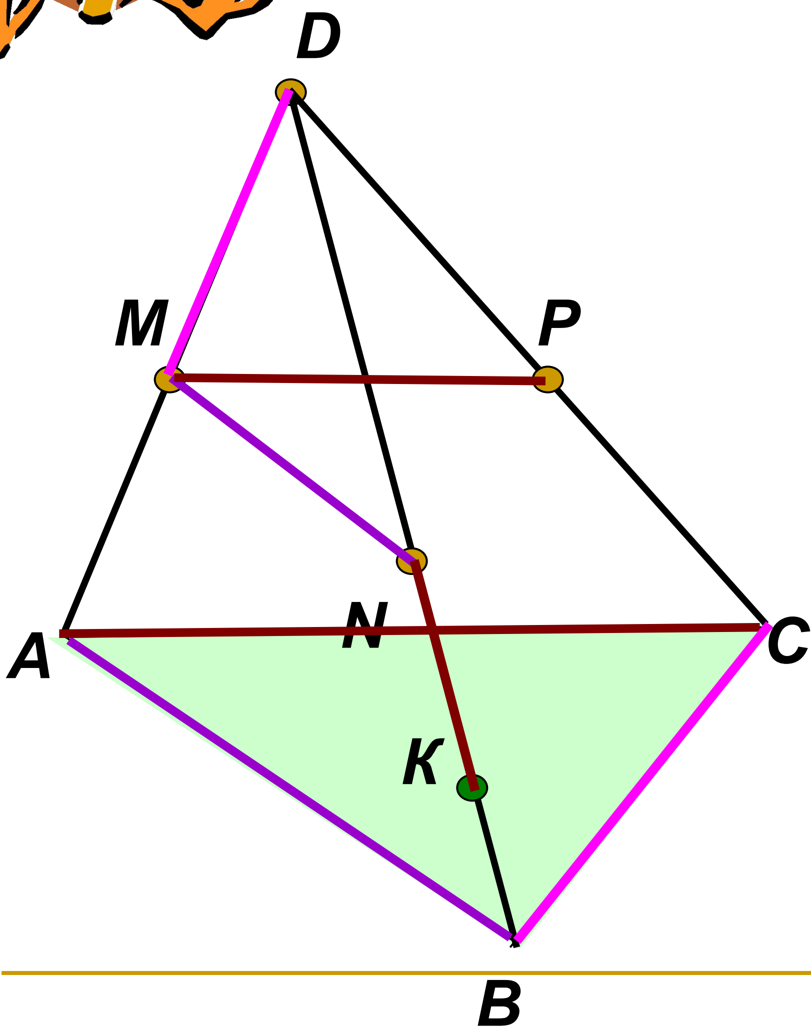
Задача №34.

Дано: $D \notin (ABC)$,

$AM = MD$; $BN = ND$; $CP = PD$

$K \in BN$.

Определить взаимное расположение прямых:



а) ND и AB

б) PK и BC

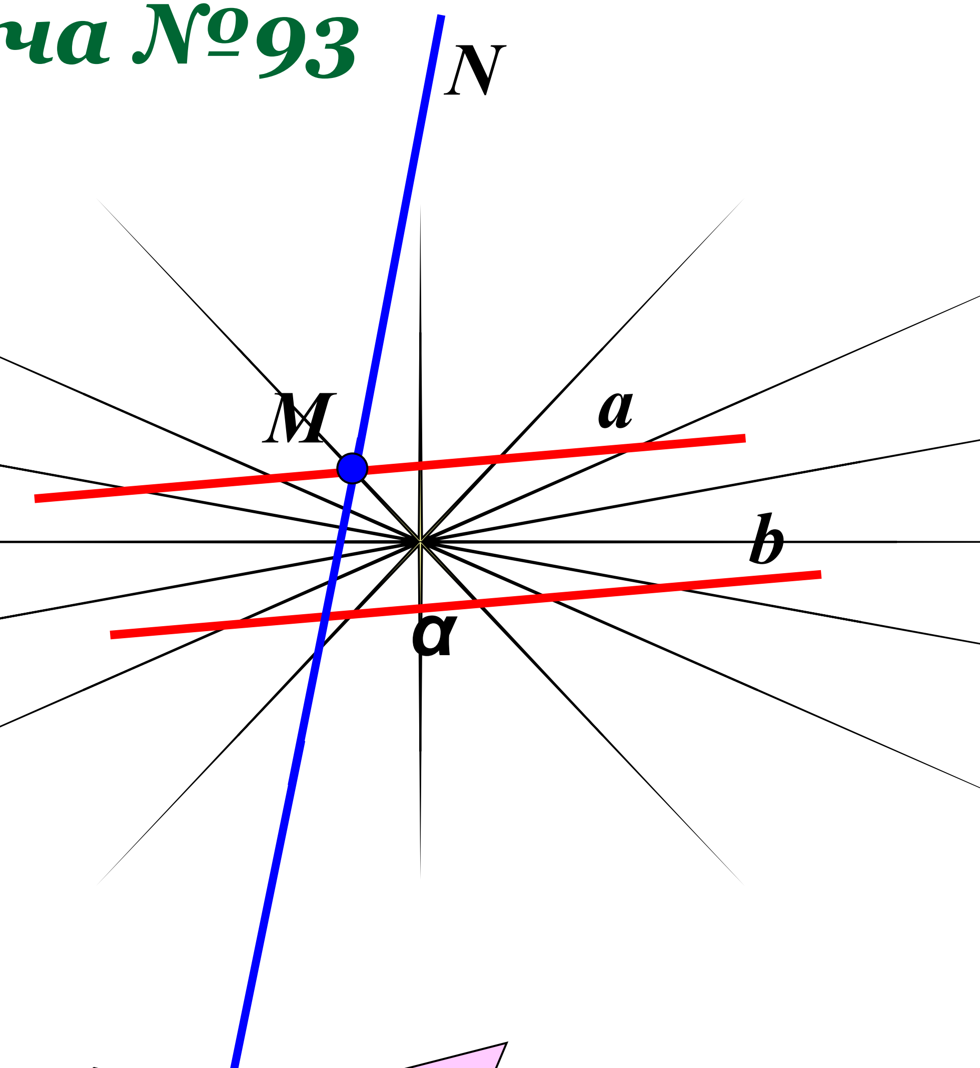
в) MN и AB

г) MP и AC

д) KN и AC

е) MD и BC

Задача №93



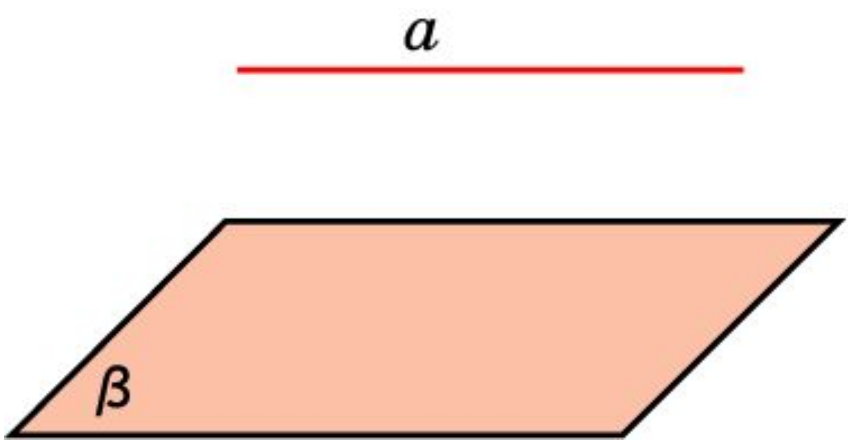
Дано: $a \parallel b$

$MN \cap a = M$

Определить взаимное расположение прямых MN и b.

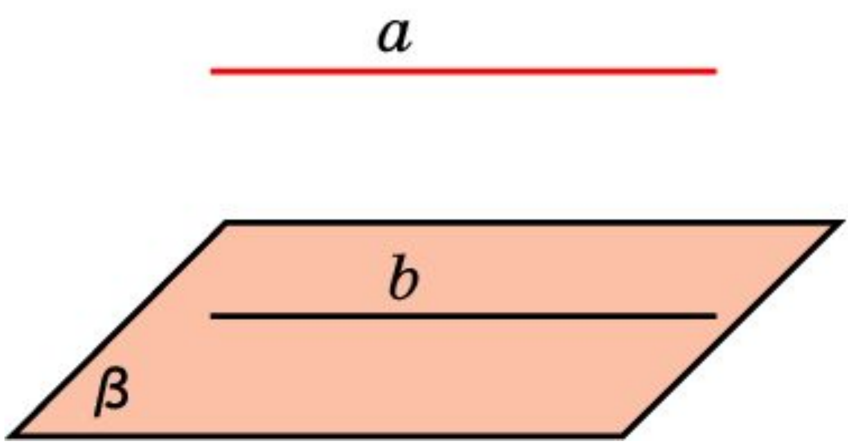
Скрещивающиеся.

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Определение. Прямая называется параллельной плоскости, если она не имеет с ней ни одной общей точки.

ПРИЗНАК ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ



Теорема. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то прямая параллельна самой плоскости.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

- Прямая и плоскость
  - Имеют общие точки
    - Имеют одну общую точку (пересекаются)
    - Имеют более одной общей точки (прямая лежит в плоскости)
  - Не имеют общих точек (параллельны)

Вопрос 1

Верно ли утверждение о том, что две прямые, параллельные одной и той же плоскости, параллельны между собой?

Ответ: Нет.

Вопрос 2

Верно ли утверждение: "Прямая, параллельная плоскости, параллельна любой прямой, лежащей в этой плоскости"?

Ответ: Нет.

Вопрос 3

Одна из двух параллельных прямых параллельна плоскости. Верно ли утверждение, что и вторая прямая параллельна этой плоскости?

Ответ: Нет.

Вопрос 4

Даны две параллельные прямые. Через каждую из них проведена плоскость. Эти две плоскости пересекаются. Как расположена их линия пересечения относительно данных прямых?

Ответ: Параллельна.

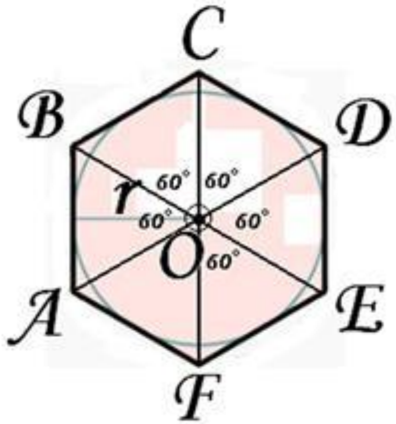
Вопрос 5

Даны две пересекающиеся плоскости. Существует ли плоскость, пересекающая две данные плоскости по параллельным прямым?

Ответ: Да.

Упражнение 1

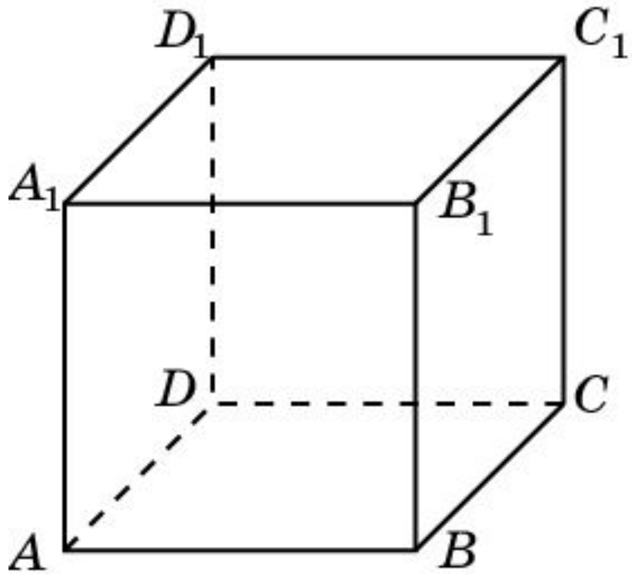
Сторона *AF* правильного шестиугольника *ABCDEF* лежит в плоскости α, не совпадающей с плоскостью шестиугольника. Как расположены остальные стороны *ABCDEF* относительно плоскости α?



Ответ: *AB*, *BC*, *DE*, *EF* пересекают плоскость; *CD* параллельна плоскости.

Упражнение 2

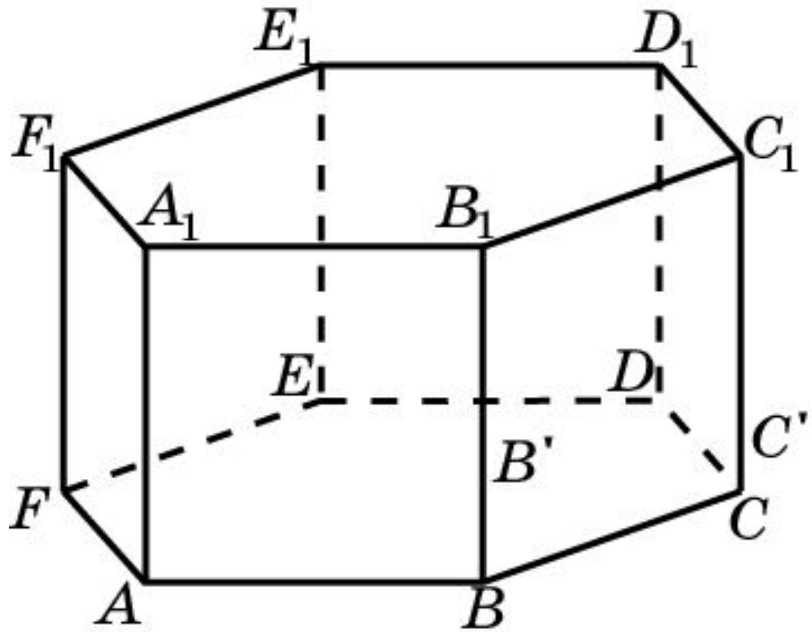
В кубе $A \ldots D_1$ укажите плоскости, проходящие через вершины куба, параллельные прямой: а) AA_1; б) AB_1; в) AC_1.



Ответ: а) BCC_1, CDD_1, BDD_1; б) CDD_1, A_1C_1D; в) нет.

Упражнение 3

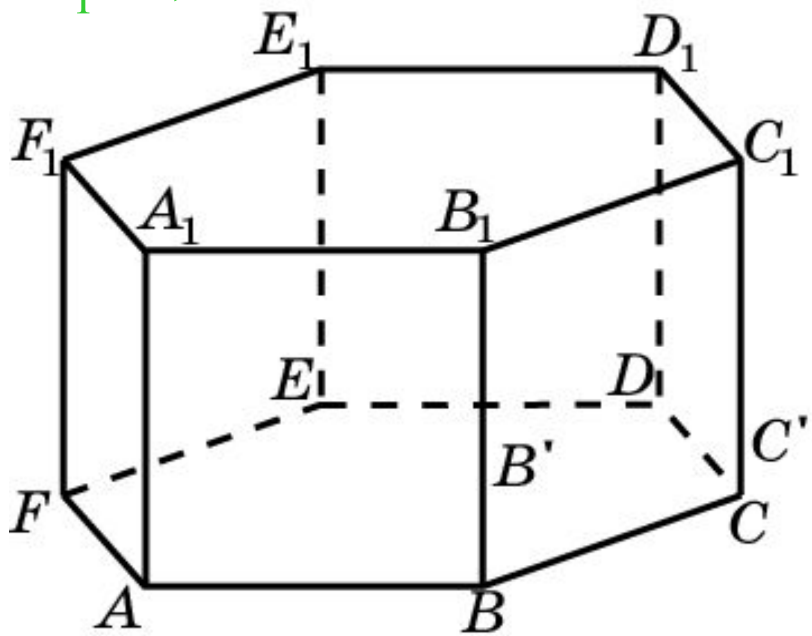
В правильной шестиугольной призме назовите плоскости, проходящие через ребра призмы и параллельные прямой: а) AB_1; б) AC_1; в) AD_1.



Ответ: а) DEE_1, CFF_1; б) DFF_1; в) BCC_1, EFF_1;

Упражнение 4

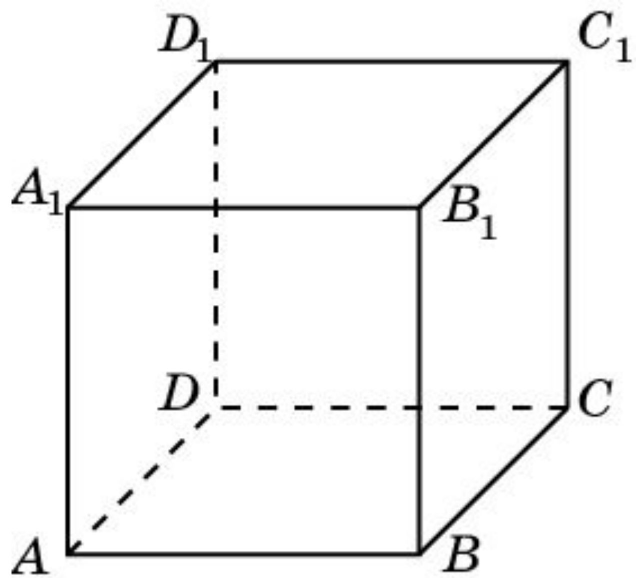
Сколько плоскостей проходит через вершины правильной шестиугольной призмы, параллельных прямой: а) AA_1; б) AB?



Ответ: а) 10; б) 6.

Упражнение 5

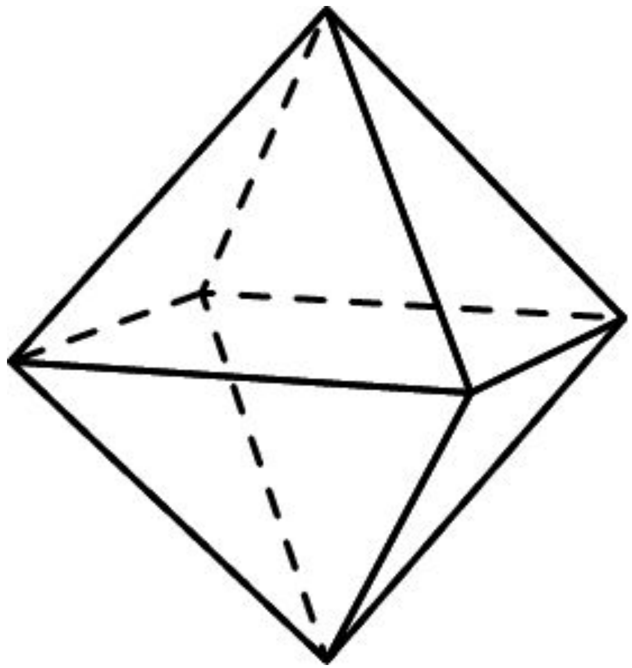
Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра куба $A...D_1$?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные У куба имеется 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 24.

Упражнение 6

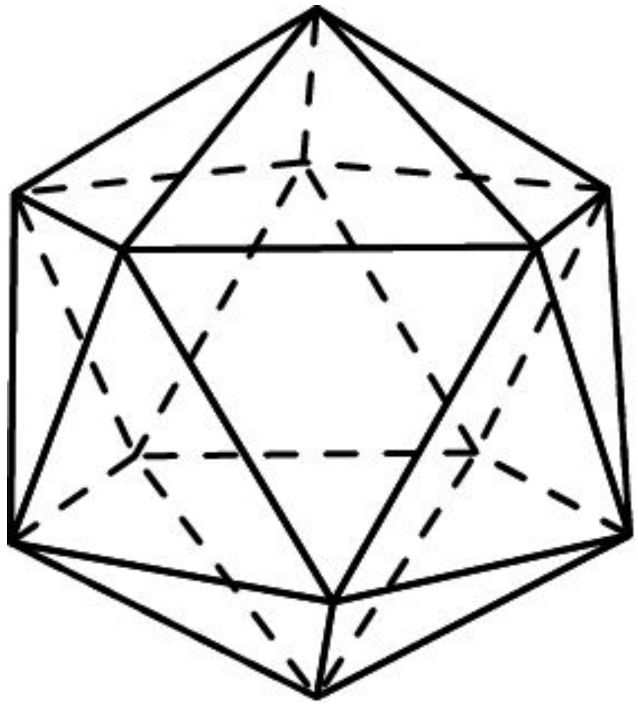
Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра октаэдра?



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У октаэдра 12 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 24.

Упражнение 7

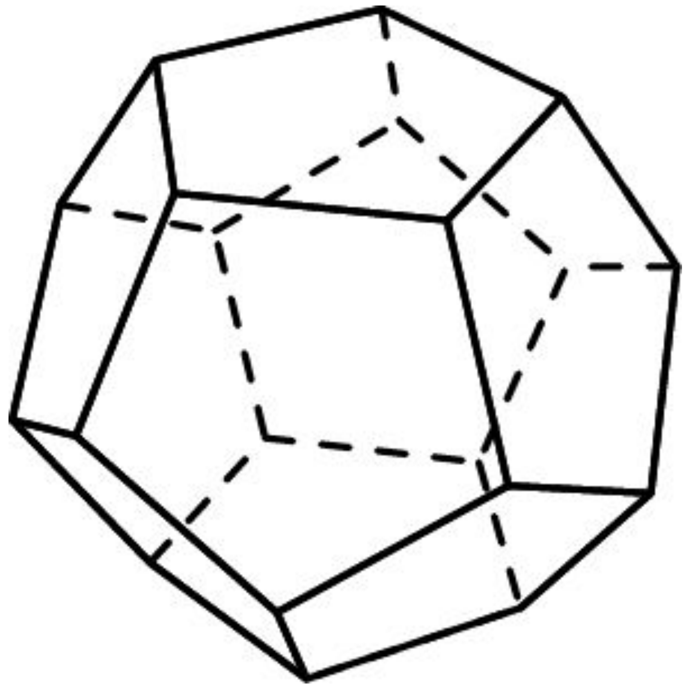
Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра икосаэдра.



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У икосаэдра 30 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 60.

Упражнение 8

Сколько имеется пар параллельных прямых и плоскостей, содержащих ребра додекаэдра.



Решение: Для каждого ребра имеется две грани, ей параллельные. У додекаэдра 30 ребер. Следовательно, искомое число пар параллельных прямых и плоскостей равно 60.

Упражнение 9

Даны две скрещивающиеся прямые. Как через одну из них провести плоскость, параллельную другой?

Решение: Через точку одной прямой провести прямую, параллельную второй данной прямой. Затем через полученные пересекающиеся прямые провести плоскость. Она будет параллельна второй данной прямой.

Упражнение 10

В основании четырехугольной пирамиды *SABCD* лежит параллелограмм. Каково взаимное расположение прямой пересечения плоскостей граней *SAB* и *SCD* и плоскости основания *ABCD*?

Ответ: Параллельны.