Основы цифровой обработки сигналов

Лекция 13 (7_2)

Тема 7. Дискретные случайные процессы(продолжение)

Преподаватель: Недашковский В. М.

Тема 7. Дискретные случайные процессы

7. Дискретные случайные процессы

7.1. О характеристиках случайных величин

7.2. О характеристиках случайных процессов

7.3. Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

7.4. Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

7.5. О спектральной факторизации

7.6. Методы определения спектральной плотности дискретного случайного процесса

7.3. Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Постановка задачи.

Пусть имеется устойчивая линейная непрерывная система, которая может характеризоваться либо передаточной функцией Ф(jω) либо ее весовой функцией *h(t).* Предположим, что входом системы является стационарный случайный процесс *g(t),* который в рамках корреляционной теории характеризуется математическим ожиданием m_y и либо корреляционной функцией $R_g(\tau)$, либо спектральной плотностью $S_g(\omega)$.

Выход x*(t)* является случайным процессом и **задача определения выхода в рамках корреляционной теории** означает определение матожидания выхода $m_x(t)$ и либо корреляционной функции выхода $R_x(\tau)$, либо спектральной плотности выхода $S_x(\omega)$ (см. рис ниже) .

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Рис. Линейная непрерывная система с входным стационарным случайным процессом *g(t)* и выходным случайн

Вспомним, что выход линейной системы может быть связан с входом с помощью весовой функции *h(t)* следующим образом

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau$$

Здесь интегрируется случайная функция, поэтому значение интеграла случайно. Нижний предел для простоты принят равным - ∞ , поскольку для устойчивой системы *h(t)=0*

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Усредняя случайные функции в обеих частях приведенного выше выражения, получим

$$[illegible] = \int_{-\infty}^{\infty} [illegible]$$

Видим, что матожидание $m_g(\lambda)$ обрабатывается линейной непрерывной системой как неслучайный сигнал. Поэтому для определения матожидания выхода можно использовать ранее известные сведения обработки детерминированного сигнала.

Для случая, когда входной случайный процесс $g(t)$ стационарен, а значит его матожидание m_g постоянно. В литературе показано, что если $\Phi(0)<\infty$, то после окончания переходного процесса матожидание выхода будет постоянным и будет определяться выражением

$m = \Phi(0\,)m$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Однако до окончания переходного процесса матожидание выхода может меняться и выход не будет стационарным процессом. Таким образом, после окончания переходного процесса выход будет стационарным процессом.

Теперь найдем спектральную плотность выхода, но сначала вспомним соотношение между спектрами входа $G(j\omega)$ и выхода $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \Phi(j\omega)\, G(j\omega)$$

и запишем соответствующее комплексно-сопряженное выражение

$$X(-j\omega) = \Phi(-j\omega)\, G(-j\omega)$$

Перемножим правые и левые части приведенных выше обоих выражений

$$|X(j\omega)|^2 = |\Phi(j\omega)|^2 |G(j\omega)|^2$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Поскольку спектры G(jω) и X(jω) – это случайные функции, то усредняя их и учитывая следующие выражения для спектральных плотностей $S_g(\omega)$ и $S_x(\omega)$

$$S_g(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M\left[|G(j\omega)|^2 \right]$$

$$S_x(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M\left[|X(j\omega)|^2 \right],$$

получим

$$S_x(\omega) = |\,\Phi(j\omega)\,|^2\, S_g(\omega)$$

Таким образом, **спектральная плотность выхода линейной непрерывной системы равна спектральной плотности входа, умноженной на квадрат модуля передаточной функции.**

Однако следует помнить, что полученное выше выражение для $S_x(\omega)$ верно только по окончании переходного процесса.

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Поскольку вывод выражения для корреляционной функции выхода более громоздкий, то приведем выражение для корреляционной функции выхода $R_x(\tau)$ без вывода

$$R_x(\tau) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(\lambda_1) w(\lambda_2) R_g(\tau + \lambda_1 - \lambda_2)\, d\lambda_1 d\lambda_2$$

Однако удобнее получить корреляционную функцию $R_x(\tau)$ как обратное преобразование Фурье от спектральной плотности $S_x(\omega)$.

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Замечание (о спектральной факторизации)

Выражение

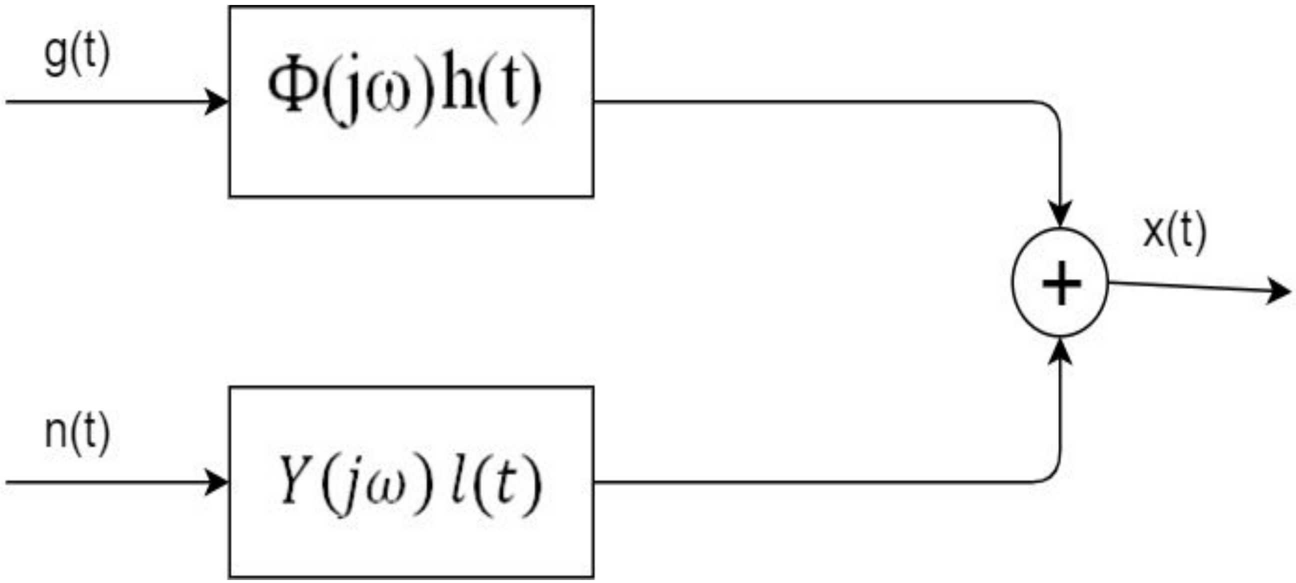
$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega)$$

можно использовать для генерации случайного процесса с заданной спектральной плотностью $S_x(\omega)$, поскольку все библиотечные генераторы случайных процессов генерируют белый шум, т.е. случайный процесс с постоянной спектральной плотностью фильтра $S_g(\omega)$. Поэтому и используется фильтр, который надо поставить на выходе генератора, чтобы получить случайный процесс с заданной спектральной плотностью $S_x(\omega)$. Передаточная функция $\Phi(j\omega)$ этого фильтра определяется с помощью приведенного выше выражения для $S_x(\omega)$, а именно

$$|\Phi(j\omega)|^2 = S_x(\omega)/S_g(\omega)$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Рассмотрим случай, когда на систему действует как полезный сигнал g(t), так и помеха n(t) (см. рис. ниже)



Характеристики полезного сигнала m_g и $S_g(\omega)$, помехи m_n и $S_n(\omega)$.

В литературе показано, что математическое ожидание выходного сигнала x(t) после окончания переходного процесса

$m_x = \Phi(0)\,m_g + Y(0)\,m_n$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Получим выражение для спектральной плотности $S_x(\omega)$ выхода. Для этого сначала запишем соотношение между спектрами

$$X(j\omega) = \Phi(j\omega)\, G(j\omega) + Y(j\omega)\, N(j\omega)$$

Затем запишем соответствующее комплексно-сопряженное выражение

$$X(-j\omega) = \Phi(-j\omega)\, G(-j\omega) + Y(-j\omega)\, N(-j\omega)$$

Перемножим правые и левые части приведенных выше обоих выражений

$$|X(j\omega)|^2 = |\Phi(j\omega)|^2 |G(j\omega)|^2 + |Y(j\omega)|^2 |N(j\omega)|^2$$

$$+\ \Phi(j\omega)G(j\omega)Y(-j\omega)N(-j\omega) + \Phi(-j\omega)G(-j\omega)Y(j\omega)N(j\omega)$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной непрерывной системой

Усредняем:

$$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Psi(j\omega)|^2 S_n(\omega) + \Phi(j\omega)\Psi(-j\omega) S_{gn}(\omega)$$
$$+ \Phi(-j\omega)\Psi(j\omega) S_{ng}(\omega)$$

$S_{gn}(\omega)$ и $S_{ng}(\omega)$ – взаимные спектральные плотности

$$S_{gn}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M[G(j\omega) N(-j\omega)]$$

$$S_{ng}(\omega) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} M[G(-j\omega) N(j\omega)]$$

Если полезный сигнал и помеха независимы, то получим

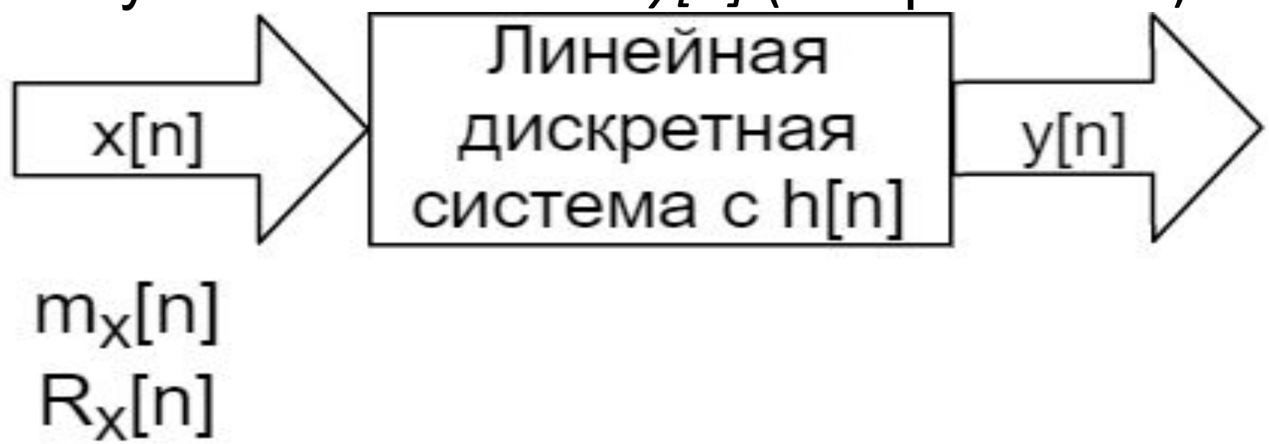
Если полезный сигнал и помеха независимы, то получим

$S_x(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |Y(j\omega)|^2 S_n(\omega)$

Зная выражение для спектральной плотности $S_x(\omega)$ выхода и интегрируя его, можно получить выражение для дисперсии выхода D_x.

7.4. Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Рассмотрим линейную дискретную систему с импульсной характеристикой *h[n]* и частотной передаточной функцией *W().* Пусть на вход подан дискретный случайный сигнал *x[n]* с математическим ожиданием $m_x[n]$ и корреляционной функцией $R_x[n]$. Определим статистические характеристики выходного дискретного случайного сигнала *y[n]* (см. рис ниже).



Запишем выход системы с помощью импульсной характеристики

[illegible] = σ [illegible]=0 ∞ [illegible] [illegible] − [illegible] = σ [illegible]=0 ∞ [illegible] [illegible] − [illegible]

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Возьмем матожидание от всех реализаций случайных процессов [illegible]

Таким образом, матожидание (как и в непрерывной системе) проходит через дискретную систему как неслучайный сигнал.

В литературе сказано, что если входной сигнал есть стационарный случайный процесс, то для устойчивой системы выходной сигнал также будет стационарным [illegible] процессом с матожиданием

$m_y = W(1)\, m_x$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Среднеквадратичное значение выхода *y[n]*

$$P_y = E\{y^2[n]\} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} y^2[n] =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l]\,x[n-k]\,x[n-l]\right\} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l]\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} x[n-k]\,x[n-l]\right\}$$

Поскольку выражение в фигурных скобках по определению есть средняя мощность входа , то можно записать

$$P_y = P_x\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l]$$

Кроме того

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} h[k]h[l] = \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k]$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Учитывая множитель , получим соотношение между средними мощностями входа и выхода

$$\square_{\square} = \square_{\square}\square\square \sum_{\square=0}^{\infty} \square^{2}\square\square\square$$

При нулевых математических ожиданиях получим соотношения для дисперсий

$$\square_{\square}^{2} = \square\square_{\square}^{2}\,\square \sum_{\square=0}^{\infty} \square^{2}\square\square\square$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Корреляционная функция выхода

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Спектральная плотность выхода как преобразование Фурье от корреляционной функции

$$S_y(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_y(nT)\, e^{-j\omega T n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega T n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k)\, h(l)\, R_x[(n+l-k)T] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega T k}\, R_x[(n+l-k)T]\, e^{-j\omega T (n+l-k)}\, h(l)\, e^{j\omega T l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\, e^{-j\omega T k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_x(mT)\, e^{-j\omega T m} \sum_{l=0}^{\infty} h(l)\, e^{j\omega T l}$$

Учитывая множитель т, получим

$$S_y(\omega) = TH\left(e^{j\omega T}\right) S_x(\omega)\, TH\left(e^{-j\omega T}\right)$$

Преобразование случайного стационарного процесса линейной дискретной системой

Полученный результат можно трактовать так. Спектральная плотность выхода равна спектральной плотности входа умноженной на квадрат модуля передаточной функции по Фурье дискретной системы, т. е.

$$S_y(\omega) = \left| H\left(e^{j\omega}\right) \right|^2 S_x(\omega)$$

7.5. О спектральной факторизации

Постановка задачи. Есть генератор белого шума с спектральной плотностью $S_g(\omega)$. Какой дискретный фильтр надо поставить на выход генератора, чтобы получить сигнал с заданной спектральной плотностью $S_x(\omega)$ (см. рис. ниже).

Рис. Линейная дискретная система с входным дискретным случайным процессом *g[n]* и выходным дискретным случайным процессом *x[n]*

Напомним: спектральные плотности входа $S_g(\omega)$ и выхода $S_x(\omega)$ линейной дискретной системы связаны соотношением

$$S_x(\omega) = |\, W(e^{j\omega T})\,|^2\, S_g(\omega)$$

где $W(e^{j\omega T})$ - **неизвестная пока** передаточная функции по Фурье дискретного фильтра . Или

$$|\, W(e^{j\omega T})\,|^2 = S_x(\omega)/\, S_g(\omega)$$

О спектральной факторизации

Вспомним соотношение, связывающее передаточную функцию по Фурье $W(e^{j\omega T})$ дискретного фильтра с его импульсной передаточной функцией $W(z)$

$$W(z) = W(e^{j\omega T})_{|e^{j\omega T} = z}$$

Далее порядок действий следующий:

1. В выражении $S_x(\omega)/S_g(\omega)$ числитель и знаменатель представить в виде полиномов, где аргументом будет $e^{j\omega T}$.
2. Сделать замену $e^{j\omega T}$.
3. Найти коэффициенты числителя b= [b0, b1, …] и знаменателя

a= [a0, a1, a2, …], расположенные в порядке убывания степеней z .

4. Воспользоваться функцией пакета MATLAB, которая найдет нули и полюса полученного в предыдущем пункте 3 выражения

[z, p, k] = tf2zp(b, a)

О спектральной факторизации

5. Нули и полюса, расположенные внутри круга единичного радиуса, образуют импульсную передаточную функцию устойчивого фильтра. Остальные нули и полюса отбрасываются. От коэффициента усиления используем корень квадратный.

Пример.

Пусть отношение спектральных плотностей имеет вид

$$\frac{S_x(\omega)}{S_g(\omega)} = \frac{1.04+0.4\cos(\omega\tau)}{1.25+\cos(\omega\tau)}$$

1. В выражении $S_x(\omega)/S_g(\omega)$ числитель и знаменатель надо представить в виде полиномов, где аргументом будет $e^{j\omega\tau}$

Введем обозначение

$$= \frac{1.04+0.4\cos(\omega\tau)}{1.25+\cos(\omega\tau)}$$

О спектральной факторизации

Или

$$\square = \frac{1.04 + 0.4\dfrac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2}}{1.25 + \dfrac{e^{j\omega\tau} + e^{-j\omega\tau}}{2}}$$

2. Сделать замену $e^{j\omega\tau} = z$

$$\square = \frac{1.04 + 0.4\dfrac{z + z^{-1}}{2}}{1.25 + \dfrac{z + z^{-1}}{2}}$$

3. Найти коэффициенты числителя b=[b0,b1,] и знаменателя

a=[a0,a1,a2,. . .], расположенные в порядке убывания степеней z

$$\square = \frac{2.08 + 0.4z + 0.4z^{-1}}{2.5 + z + z^{-1}} = \frac{0.4 + 2.08z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 2.5z^{-1} + z^{-2}}$$

b= [0.4, 2.08, 0.4],

a= [1, 2.5, 1]

О спектральной факторизации

4. Воспользуемся функцией пакета MATLAB, которая найдет нули и полюса полученных в предыдущем пункте 3 коэффициентов числителя и знаменателя

[z, p, k] = tf2zp(b, a)

Приводим результаты расчета нулей и полюсов

Нули:

n=

-5.0000 – по модулю больше единицы (отбрасываем)

-0.2000 – по модулю меньше единицы (учитываем)

Полюса:

p =

-2.0000 – по модулю больше единицы (отбрасываем)

-0.5000 – по модулю меньше единицы (учитываем)

Коэффициент усиления:

k =

0.4000 – выбираем корень квадратный от этого значения $k^{1/2}$ =0.6326

О спектральной факторизации

5. Нули и полюса, расположенные внутри круга единичного радиуса, образуют импульсную передаточную функцию устойчивого фильтра. Остальные нули и полюса отбрасываются. От коэффициента усиления используем корень квадратный.

Таким образом, искомая импульсная передаточная функция дискретного фильтра равна

$$W(z) = 0.6326\frac{z+0.2}{z+0.5}$$

Этим методом можно пользоваться для генерирования случайных процессов с заданными характеристиками.

Спасибо за внимание