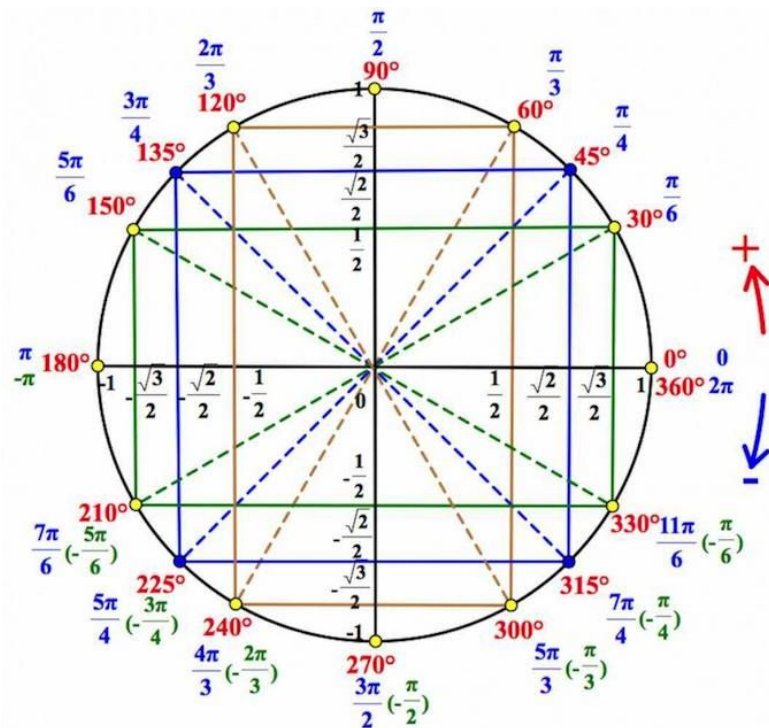


# ТРИГОНОМЕТРИЯ

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ



Преподаватель:  
Махмудов  
Кароматулло Азизович

## ФУНКЦИЯ $y = \sin x$

Если каждому действительному числу  $x$  поставлено в соответствие число  $y$ , равное синусу угла в  $x$  радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \sin x, \quad (1)$$

называемая синусом числового аргумента  $x$ .

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел  $\mathbf{R}$ , областью изменения — отрезок  $[-1; 1]$ .

Отметим некоторые свойства функции  $y = \sin x$ .

1. Функция  $y = \sin x$  нечетная.
2. Функция  $y = \sin x$  периодическая с главным периодом  $2\pi$ .
3. Функция  $y = \sin x$  непрерывна на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ .
4. Функция  $y = \sin x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  возрастает, а на отрезке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  убывает.

Для построения графика функции  $y = \sin x$  надо для каждого  $x$  вычислить соответствующее значение  $y = \sin x$  и точки  $(x; y)$  отметить на координатной плоскости  $xOy$ . Совокупность этих точек образует график функции  $y = \sin x$ .

Однако эту работу выполнить невозможно, потому что указанных точек бесконечно много. График функции  $y = \sin x$  можно построить приближенно, используя свойства этой функции и ее значения для некоторых  $x$ .

Построим сначала график функции  $y = \sin x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Приведем таблицу приближенных значений  $y = \sin x$  для некоторых значений  $x$  из этого отрезка (табл. 1).

Таблица 1

$x$	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$	$\frac{\pi}{4}$
$y = \sin x$	0	0,13	0,29	0,38	0,50	0,61	0,71

$x$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \sin x$	0,79	0,87	0,92	0,97	0,99	1

график функции  $y = \sin x$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

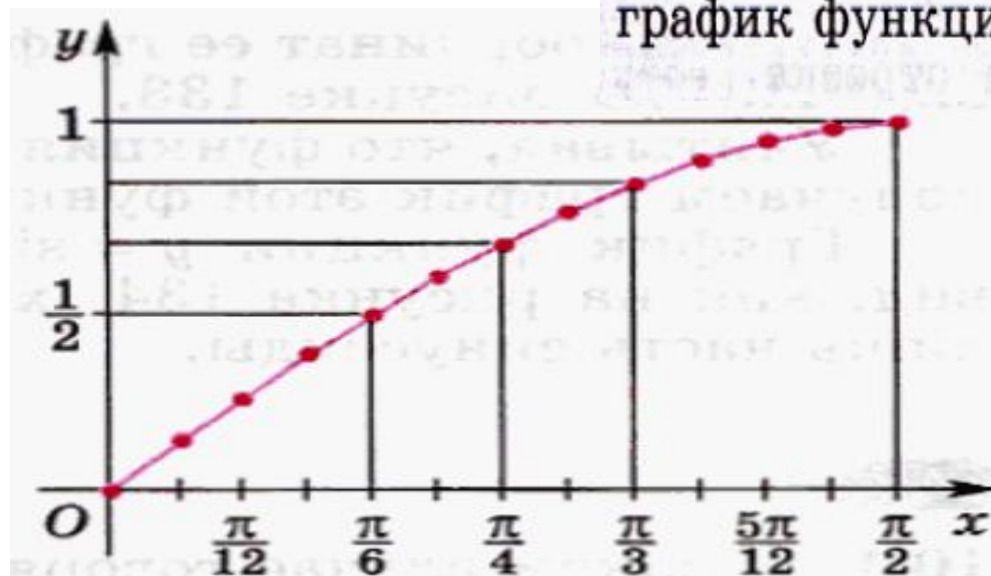
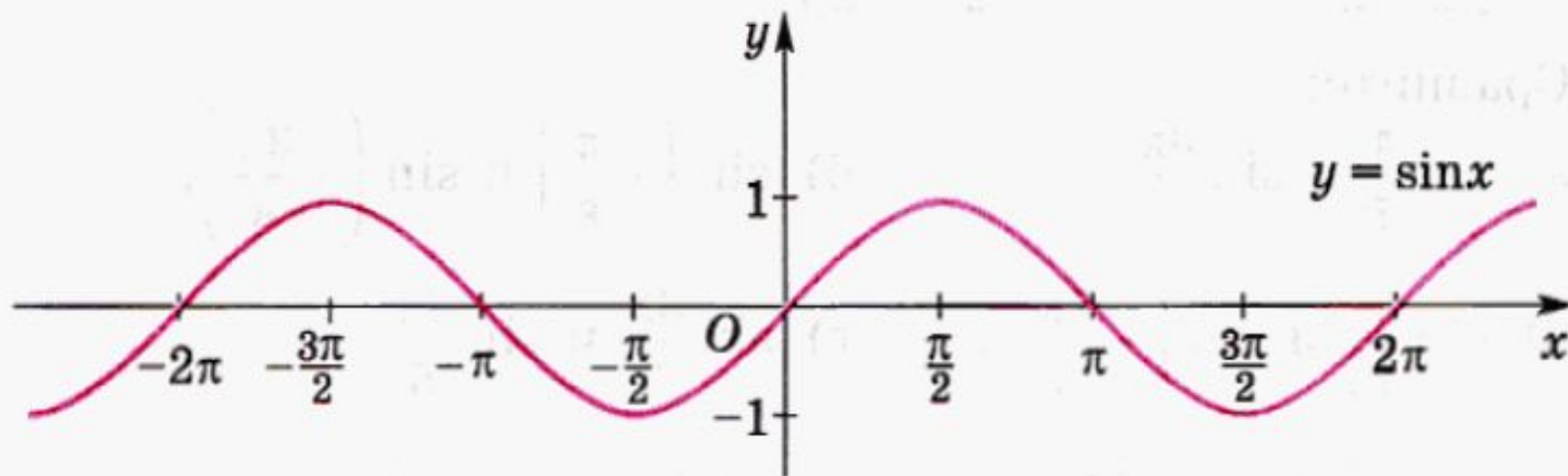


График функции  $y = \sin x$  называют **синусоидой**.

Учитывая, что функция  $y = \sin x$  периодическая с периодом  $2\pi$ , получаем график этой функции для всех  $x$ .



## ФУНКЦИЯ $y = \cos x$

Если каждому действительному числу  $x$  поставлено в соответствие число  $y$ , равное косинусу угла в  $x$  радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \cos x, \quad (1)$$

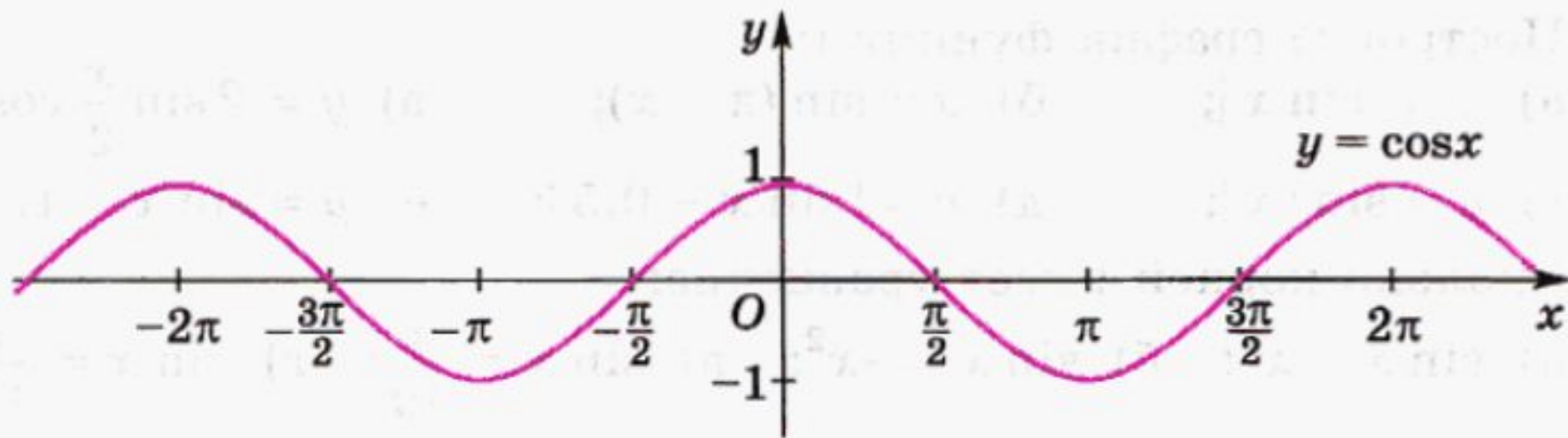
называемая косинусом числового аргумента  $x$ .

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел  $\mathbf{R}$ , областью изменения — отрезок  $[-1; 1]$ .

Отметим некоторые свойства функции  $y = \cos x$ .

1. Функция  $y = \cos x$  четная.
2. Функция  $y = \cos x$  периодическая с главным периодом  $2\pi$ .
3. Функция  $y = \cos x$  непрерывна на промежутке  $(-\infty; +\infty)$ .
4. Функция  $y = \cos x$  на отрезке  $[0; \pi]$  убывает, а на отрезке  $[\pi; 2\pi]$  возрастает.

Из свойств 2 и 4 следует, что функция  $y = \cos x$  убывает на каждом из промежутков  $[0 + 2\pi n; \pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ , возрастает на каждом из промежутков  $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

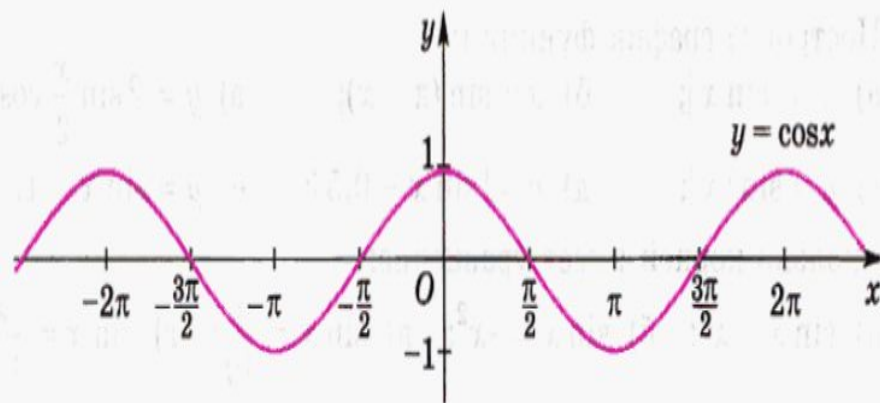
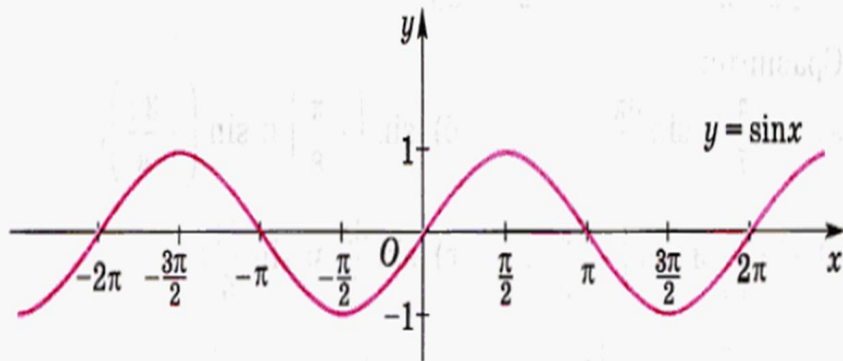


Так как

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \cos x = \cos x,$$

то из непрерывности на промежутке  $(-\infty; +\infty)$  функции  $y = \sin x$  следует непрерывность на промежутке  $(-\infty; +\infty)$  функции  $y = \cos x$ . Кроме того, отсюда же следует, что график функции  $y = \cos x$  получается переносом графика функции  $y = \sin x$  влево на  $\frac{\pi}{2}$ ,

**График функции  $y = \cos x$  называют косинусоидой.**





## ФУНКЦИЯ $y = \operatorname{tg} x$

Если каждому действительному числу  $x$ , отличному от  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k$  — любое целое число, поставлено в соответствие число  $y$ , равное тангенсу угла в  $x$  радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \operatorname{tg} x, \quad (1)$$

называемая тангенсом числового аргумента  $x$ .

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел  $x$ , отличных от  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , областью изменения — интервал  $(-\infty; +\infty)$ .

Отметим некоторые свойства функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

1. Функция  $y = \operatorname{tg} x$  нечетная.
2. Функция  $y = \operatorname{tg} x$  периодическая с главным периодом  $\pi$ .
3. Функция  $y = \operatorname{tg} x$  непрерывна на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .
4. Функция  $y = \operatorname{tg} x$  возрастает на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Из свойств 2—4 следует, что функция  $y = \operatorname{tg} x$  непрерывна и возрастает на каждом из промежутков  $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

Теперь перейдем к построению графика функции  $y = \operatorname{tg} x$ .

Построим его сначала на полуинтервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Приведем таблицу приближенных значений функции  $y = \operatorname{tg} x$  для некоторых  $x$  из этого полуинтервала (табл. 2).

Отметим эти точки  $(x; y)$  на координатной плоскости  $xOy$ . Учитывая, что на полуинтервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$  функция  $y = \operatorname{tg} x$  непрерывно возрастает от 0 до  $+\infty$ , соединим отмеченные точки непрерывной линией. Полученную непрерывную кривую (рис. 136) можно рассматривать как приближенный график функции  $y = \operatorname{tg} x$  на полуинтервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

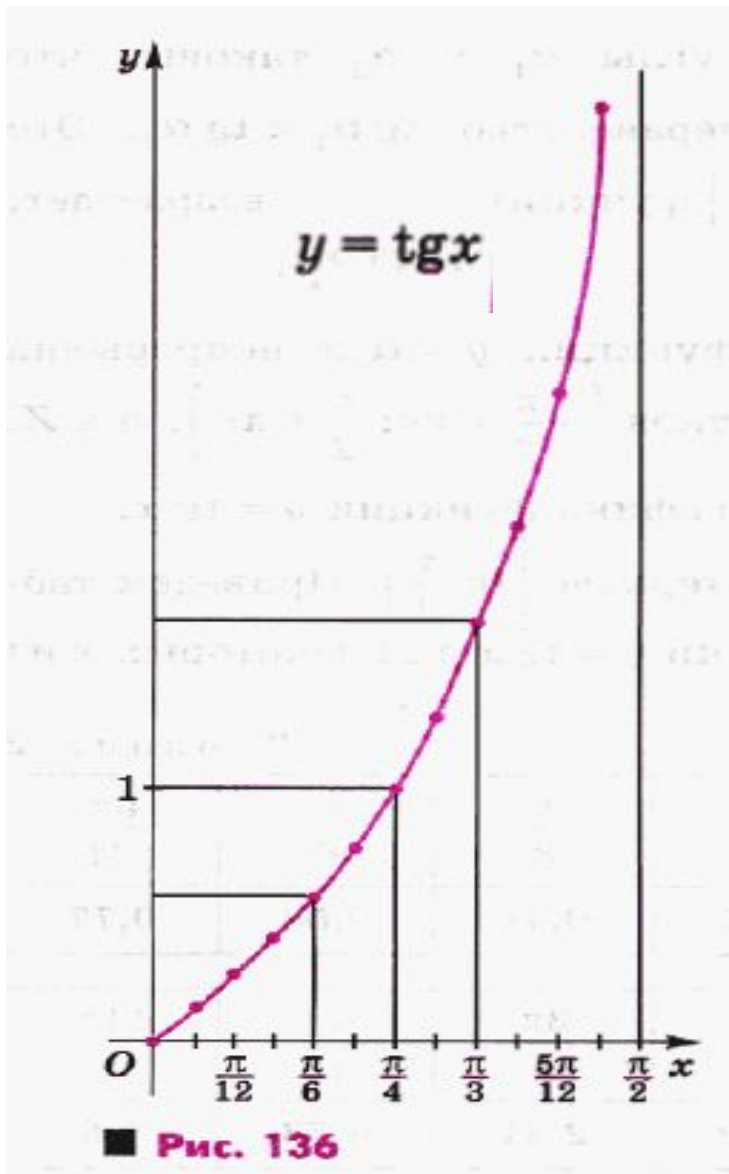
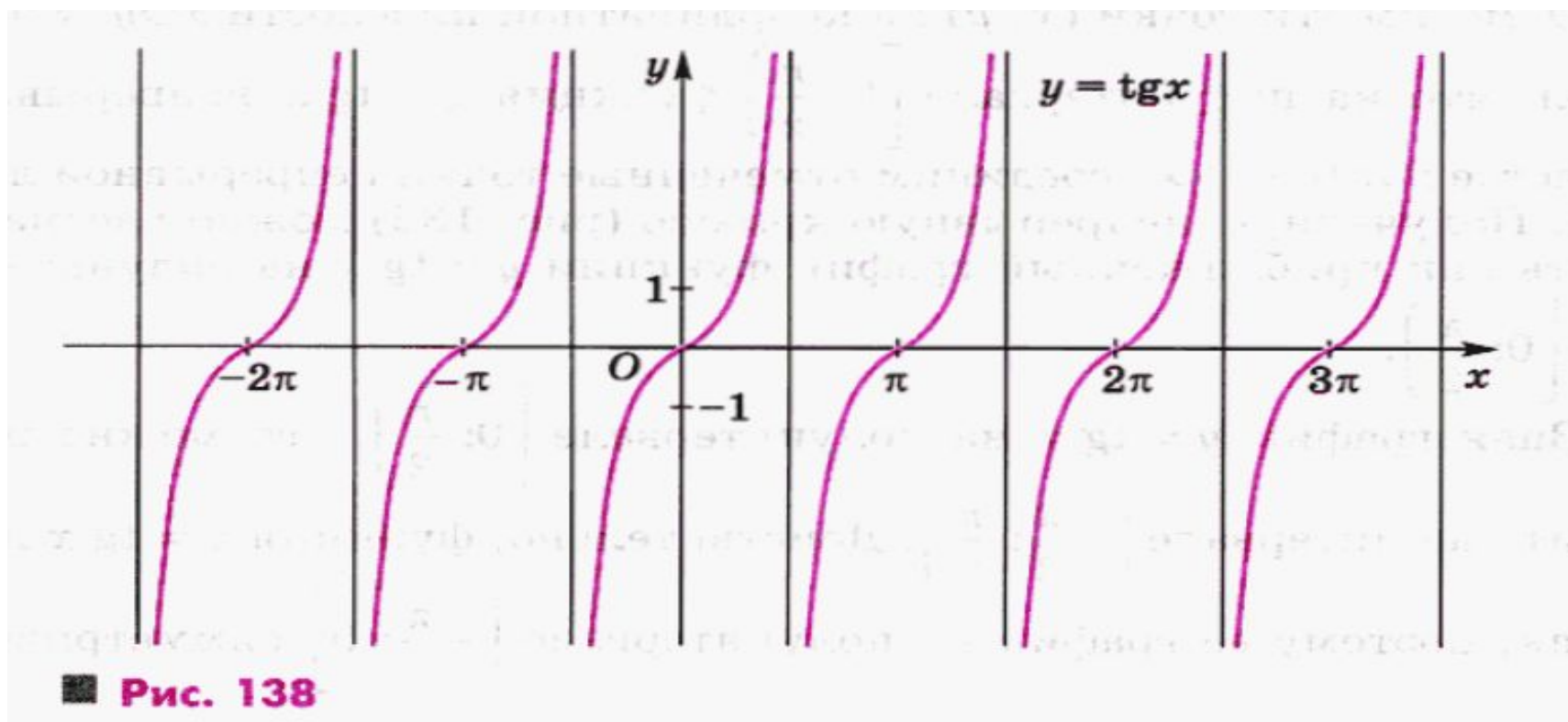


Таблица 2

$x$	0	$\frac{\pi}{24}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	0	0,13	0,27	0,41	0,58	0,77
$x$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{24}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{24}$
$y = \operatorname{tg} x$	1	1,3	1,73	2,41	3,73	7,6

Наконец, учитывая, что функция  $y = \operatorname{tg} x$  периодическая с периодом  $\pi$ , получим ее график для всех  $x$ . График функции  $y = \operatorname{tg} x$  называют тангенсоидой, он имеет вид, как на рисунке 138, на котором изображена часть графика.



## ФУНКЦИЯ $y = \text{ctg}x$

Если каждому действительному числу  $x$ , отличному от  $x = \pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , поставлено в соответствие число  $y$ , равное котангенсу угла в  $x$  радиан, то говорят, что этим определена функция

$$y = \text{ctg} x, \quad (1)$$

называемая котангенсом числового аргумента  $x$ .

Областью определения функции (1) является множество всех действительных чисел  $x$ , отличных от  $x = \pi k$ , где  $k \in \mathbf{Z}$ , областью изменения — интервал  $(-\infty; +\infty)$ .

Отметим некоторые свойства функции (1).

1. Функция  $\text{ctg} x$  нечетная.
2. Функция  $\text{ctg} x$  периодическая с главным периодом  $\pi$ .
3. Функция  $\text{ctg} x$  непрерывна на интервале  $(0; \pi)$ .
4. Функция  $\text{ctg} x$  убывает на интервале  $(0; \pi)$ .

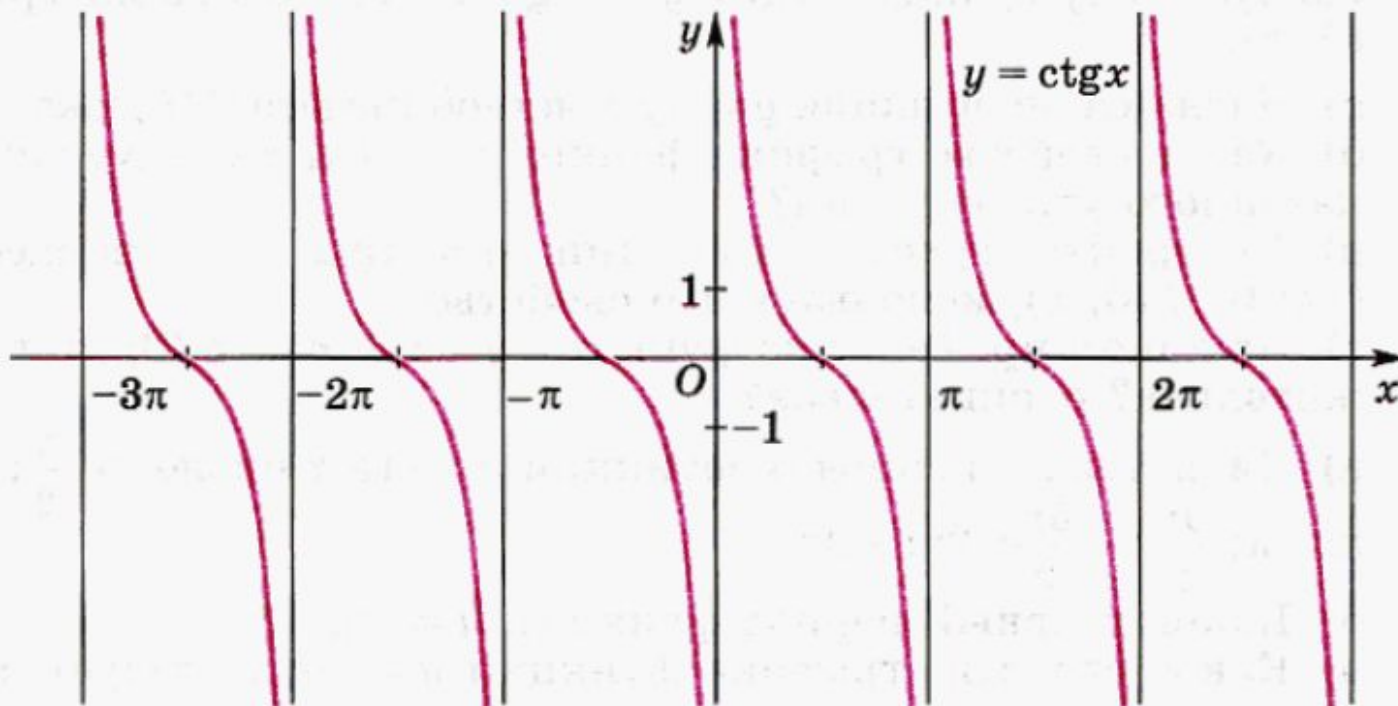
Так как

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = -\operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right), \quad (2)$$

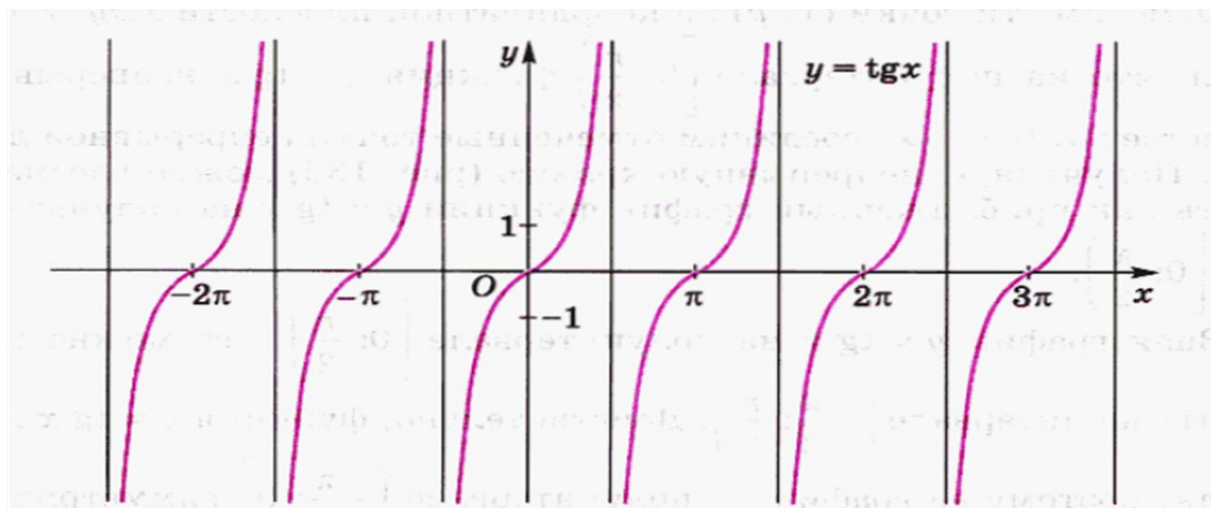
а функция  $y = \operatorname{tg} x$  непрерывна на интервале  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ , то из равенств (2) следует, что функция  $y = \operatorname{ctg} x$  непрерывна на интервале  $(0; \pi)$ . Тем самым показана справедливость свойства 3.

Из свойств 2—4 следует, что функция  $y = \operatorname{ctg} x$  непрерывна и возрастает на каждом из промежутков  $(0 + \pi n; \pi + \pi n)$ ,  $n \in \mathbf{Z}$ .

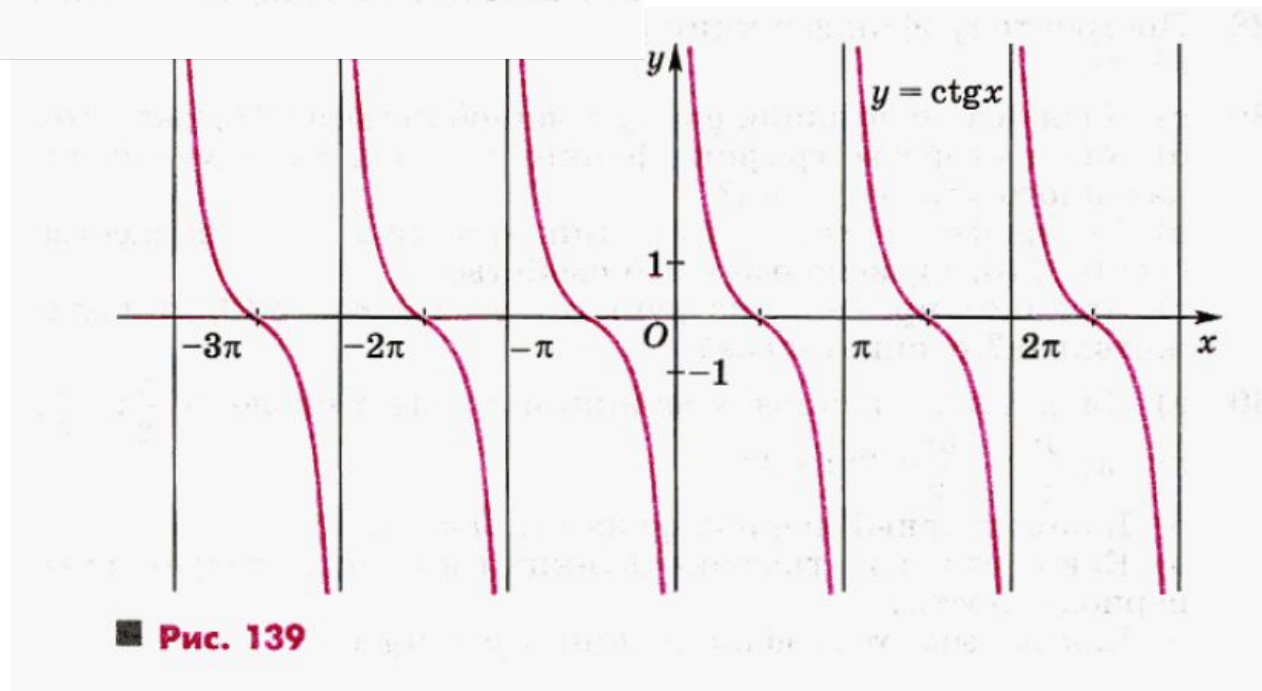
Из равенств (2) следует, что график функции  $y = \operatorname{ctg} x$  можно получить из графика функции  $y = \operatorname{tg} x$  так: надо перенести его вправо на  $\frac{\pi}{2}$ , а затем отобразить симметрично относительно оси  $Ox$ . Поэтому график функции  $y = \operatorname{ctg} x$  будет иметь вид, как на рисунке 139. График функции  $y = \operatorname{ctg} x$  называют **котангенсоидой**.



■ Рис. 139



■ Рис. 138



■ Рис. 139