

Лекция 4

Математическое обеспечение САПР

Содержание лекции

- Классификация математического обеспечения по назначению и способам реализации.
- Понятие модели и моделирования.
- Классификация моделей.
- Методика получения математических моделей элементов САПР.
- Формализованные методы поиска технических решений.
- Оптимизационные методы (линейного программирования, нелинейного программирования, целочисленного программирования) и примеры их использования в архитектурных задачах.

3.1. Классификация математического

По назначению и способам реализации МО САПР делится на 2 части:

- 1) математические методы и построенные на их основе математические модели, описывающие объекты проектирования (специфичны в различных САПР и зависят от проектируемых объектов);
- 2) формализованное описание технологии автоматизированного проектирования (требует формализации всей логики проектного процесса, в том числе и логики взаимодействия проектировщиков друг с другом на основании использования средств автоматизации.).

При совершенствовании и развитии процесса проектирования необходимо для его описания использовать системный подход.

Понятие о модели и моделировании

Под *моделью* следует понимать приближенное описание тех или иных свойств реального объекта или процесса.

Под *моделированием* – построение модели, отображающей структуру, характер и другие свойства исследуемого оригинала.

Классификация моделей



Модели могут быть материальные и идеальные.

Материальными моделями называются такие специально созданные или отобранные человеком объекты, которые физически воспроизводят те или иные свойства и связи, характерные для исследуемого процесса, объекта или явления (например, макет объекта).

Идеальные модели представляют собой мысленные конструкции, теоретические схемы, воспроизводящие в идеальной форме свойства и связи исследуемого объекта или процесса. Эти модели фиксируются при помощи отдельных знаков, чертежей и других материальных средств.

Важнейшей особенностью любой модели является ее сходство с оригиналом в одном из строго зафиксированных и обоснованных отношений.

К идеальным моделям относят: семантические, математические и графические модели.

Семантическими — называют словесные описания свойств исследуемых явлений (свойств объектов, процессов).

Графическая модель — условное графическое отображение свойств объекта, конкретных параметров (чертежи) и структурных связей (абстрактных). Графические модели могут описывать не только структурные, но и функциональные и информационные аспекты объектов и процессов. Графические модели бывают плоскостные и пространственные (3D)

Математическая модель — совокупность математических объектов (чисел, переменных, матриц, множеств и т.п.) и отношений между ними, которая адекватно отображает исследуемые свойства объекта или процесса.

ММ классифицируются по следующим признакам:

- характер отображаемых свойств объекта;
- принадлежность к иерархическому уровню;
- степень детализации описания внутри одного уровня;
- способ получения модели.

По характеру отображаемых свойств объекта ММ делятся на структурные и функциональные.

Структурные ММ предназначены для отображения структурных свойств объекта. Различают структурные топологические и геометрические ММ.

В *топологических* ММ отображаются состав и взаимосвязи элементов. Их чаще всего применяют для описания объектов, состоящих из большого числа элементов, при решении задач привязки элементов к определенным пространственным позициям (например, задачи компоновки генплана, размещения помещений, трассировки коммуникаций, геолокации) или к относительным моментам времени (например, при разработке расписаний, движения транспортных и людских потоков). Топологические модели могут изображаться в виде графических моделей.

В *геометрических* ММ отображаются свойства объектов, в них дополнительно к сведениям о взаимном расположении элементов содержатся сведения о форме деталей. Геометрические ММ могут выражаться совокупностью уравнений линий и поверхностей; совокупностью алгебраических соотношений, описывающих области, составляющие тело объекта; графами и списками, отображающими конструкции из типовых конструктивных элементов, и т.п.

Функциональные ММ предназначены для отображения физических или информационных процессов, протекающих в объекте при его функционировании или изготовлении. Обычно функциональные ММ представляют собой системы уравнений, связывающих фазовые переменные, внутренние, внешние и выходные параметры.

По степени детализации описания в пределах каждого иерархического уровня выделяют полные ММ и макромоделли.

Полная модель - эта модель, в которой фигурируют фазовые переменные, характеризующие состояния всех имеющихся межэлементных связей (т.е. состояние всех элементов проектируемого объекта).

Макромодель - ММ, в которой отображаются состояния значительно меньшего числа межэлементных связей, что соответствует описанию объекта при укрупненном выделении элементов.

По способу представления свойств объекта функциональные ММ делятся на аналитические и алгоритмические.

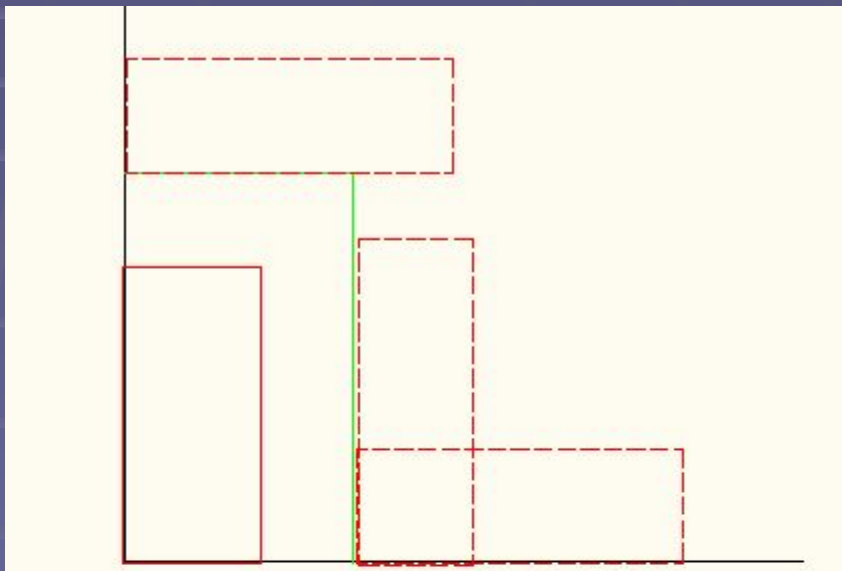
Аналитические модели характеризуются высокой экономичностью, однако их получение возможно лишь в частных случаях и, как правило, при принятии существенных допущений и ограничений, снижающих точность и сужающих адекватность модели.

Алгоритмические модели выражают связи выходных параметров с параметрами внутренними и внешними в форме алгоритма.

Информационная математическая модель наиболее полно позволяет описывать структуру и другие свойства объектов и процессов с целью их аналитического и экспериментального исследования.

Все процессы имеют вероятностный характер, однако для удобства управления математической моделью ее принято считать детерминированной.

Имитационное моделирование представляет собой разработку аналитической модели, состоящей в максимальном приближении процесса, выполняемого компьютером, к традиционному процессу на основе эвристического алгоритма. *Эвристика* – метод, основанный на неформальных, интуитивных соображениях. В большинстве случаев этот метод позволяет сокращать число просматриваемых вариантов при поиске решения задачи, причем этот прием не гарантирует наилучшее решение.



Применение той или иной модели для описания свойств, структуры и содержания объекта или процесса осуществляется на этапе *формализации* задачи.

Формализация — это процесс замены реального объекта или процесса его формальным описанием, т.е. его информационной моделью (символами математики и математической логики).

С информационной точки зрения проектирование есть процесс преобразования входной информации об объекте проектирования, о состоянии знаний в рассматриваемой области, опыте проектирования объектов аналогичного назначения в выходную информацию в виде архитектурной, проектно-конструкторской и технологической документации, выполненной в определенной форме и содержащей описание объекта для его материальной реализации.

Для описания объекта по уровням подробности в ИКТ применяют *блочно-иерархический подход* к описанию процесса проектирования, при котором задачи большой размерности разбивается на последовательно решаемые группы задач малой размерности, причем внутри групп разные задачи могут решаться параллельно. На каждом уровне имеются свои представления о системе и элементах. То, что на более высоком i -том уровне считалось элементом, на следующем $i-1$ уровне становится системой.

Для описания объекта используют различные аспекты: функциональный, конструкторский и технологический.

Функциональный аспект отображает основные принципы функционирования, характера физических и информационных процессов, протекающих в объекте, и отражается в принципиальных, функциональных, структурных схемах и сопровождающих их документах.

Например, если решается задача получения архитектурно-строительной документации (чертежей) здания, то при рассмотрении функционального аспекта, сначала выясняется из каких частей состоит здание, затем описывается, что собой представляет каждая часть и воздействующие на нее факторы, а также закономерности ее построения (расчета).

Если речь идет о проектировании генерального плана, то уровне описания функционального аспекта необходимо определить внешние факторы, влияющие на генеральный план (градостроительная ситуация), требования к размещаемым объектам (конфигурация, ориентация по странам света, максимально и минимально допустимые расстояния между объектами, функциональные связи между размещаемыми объектами и с внешней территорией и пр.

Конструкторский аспект реализует результаты функционального проектирования, т.е. определяет геометрические формы (параметры) объектов и их взаимное расположение в пространстве.

Технологический аспект — связан с реализацией конструкторского проектирования, т.е. с описанием методов и алгоритмов получения конечного продукта. В нашем случае это могут быть методы геометрического моделирования отдельных конструктивных элементов и их взаимного расположения, методы и алгоритмы расчета, методы оптимального размещения и пр.

Возможно более дифференцированное описание свойств объекта с выделением в нем подсистем и соответствующего числа аспектов. Например, если объектом проектирования является здание, то функциональный аспект можно разделить по физическим основам описываемых явлений на: композиционный (сортировка, компоновка, размещение), динамический (расчеты, нагрузки), геометрический (параметры объекта, его форма) и т.п. При этом внутри каждого аспекта возможно специфическое выделение иерархических уровней.

3.3. Методика разработки математических моделей

В общем случае методика получения математических моделей включает в себя следующие операции

- 1) Выбор свойств объекта, которые подлежат отражению в модели. Этот выбор основан на анализе возможных применений модели и определяет степень ее универсальности. *Степень универсальности* – требование к математической модели, которое характеризует полноту отображения в модели свойств реального объекта.
- 2) Сбор исходной информации о выбранных свойствах объекта.
- 3) Синтез структуры математической модели. *Структура математической модели* – общий вид математических соотношений модели без конкретных числовых значений параметров.

4) Расчет числовых значений параметров математической модели (если имеется пошагово рассчитанный прототип) или экспериментальная апробация модели на контрольном примере.

5) Оценка точности и адекватности математической модели. *Точность модели* оценивается степенью совпадения значений параметров реального объекта и значений тех же параметров, рассчитанных с помощью разработанной математической модели. *Адекватность математической модели* – это способность отражать заданные свойства объекта с погрешностью не выше заданной.

3.4. Методы поиска новых технических решений

Ассоциативные методы поиска технических решений основаны на применении в творческом процессе семантических (описательных) свойств понятий путем использования аналогии их вторичных смысловых оттенков. Основными источниками для генерирования новых идей служат ассоциации, метафоры и случайно выбранные понятия.

Ассоциация – связь, возникающая при определенных условиях между двумя или более психическими образованиями (ощущениями, восприятиями, идеями и т.п.). *Метафора* – перенесение свойств одного предмета (явления) на другой на основании общего для обоих признака. К ассоциативным методам относятся методы фокальных объектов, а также метод гирлянд случайностей и ассоциаций.

Цель метода фокальный объектов — поиск новых модификаций известных способов и устройств. Сущность этого метода состоит в перенесении признаков случайно выбранных объектов на исследуемый объект.

Целью метода контрольных вопросов является подведение проектировщика на решение задачи с помощью наводящих вопросов. Этот метод может применяться либо в форме монолога проектировщика, обращенного к самому себе, либо в форме диалога, например, в виде вопросов системного аналитика, обращенных к группе проектировщиков. Суть этого метода заключается в том, чтобы рассматривать вопросы, содержащиеся в списке, и в связи с этим решать свою задачу.

Метод мозгового штурма состоит в последовательном решении задачи двумя группами людей (генераторами и экспертами)

Метод синектики – является усовершенствованием метода мозгового штурма отличается использованием приемов психологической настройки, в том числе активным применением аналогий.

Метод морфологического анализа. Цель – систематическое использование всех мыслимых вариантов, вытекающих из закономерностей строения (т.е. морфологии) совершенствуемой системы.

Метод функционально-стоимостного анализа (экспертных оценок) – применяется с целью поиска более экономичного решения. Поскольку в группе участвуют специалисты различных профессий, то проблема рассматривается с различных точек зрения, при этом получают наиболее приемлемый вариант решения.

3.5. Оптимизационные методы в проектировании

Методы оптимизации – численные методы построения алгоритмов нахождения максимума (минимума) функции и точек, в которых они достигаются при наличии ограничений или без них.

Целевая функция - математическое выражение критерия оптимальности.

Критерий оптимальности – показатель или система показателей качества системы, значения которого должны быть максимизированы или минимизированы.

При минимизации одного параметра задача называется *однокритериальной*, если несколько — *многокритериальной*

Существуют задачи нахождения *глобального экстремума* — соответственно максимума или минимума по всей допустимой области и *локального экстремума* — в произвольно малой окрестности точки этой области.

Если область значений переменных не ограничена, т.е. отсутствуют ограничения на значения переменных, то имеет место *безусловный глобальный экстремум*. При наличии ограничений имеет место *экстремум условный* (при данных ограничениях).

При отсутствии ограничений, как правило, применяют *методы спуска*. Они состоят в последовательности приближений к точке минимума (максимума), начиная от произвольного значения функции. Существует много разновидностей этого метода в зависимости от шага и направления спуска.

Линейное программирование

Задачи с ограничениями требующие нахождения условного экстремума наиболее часто решаются методами линейного программирования.

Линейное программирование – раздел математического программирования, включающий теорию и вычислительные методы максимизации и минимизации линейных функций, переменные которых связаны рядом линейных ограничений (уравнений и неравенств).

Общая задача линейного программирования

максимизировать функцию

$$F(x) = \sum_{j=1}^N c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i; i = 1, 2, \dots, m_1$$

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j > b_i; i = m_1 + 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_j; n_1 \leq n$$

где $F(x)$ – целевая функция;

c_i – коэффициенты при переменных целевой функции;

x_i – переменные задачи;

b_i – правые части ограничений;

a_{ij} – коэффициенты при переменных в ограничениях.

Методы линейного программирования

Градиентный метод является итеративным методом поиска экстремума. На каждом шаге градиентного метода осуществляется сдвиг от текущей точки в направлении градиента, вычисленного в этой точке (*градиент* – вектор, координатами которого являются частные производные функции). Длина шага может быть фиксирована или убывать к нулю.

Симплекс метод, основанный на том факте, что среди оптимальных точек (если они существуют) обязательно находится вершина выпуклого многогранника, представляющего область допустимых решений. Метод состоит в движении по соседним вершинам многогранного множества задачи, определяемого ее ограничениями, и складывается из конечного множества операций, которые проводятся до получения оптимального решения, либо до выяснения неразрешимости задачи.

Методы, используемые при решении архитектурных задач

Оптимизационную задачу с нелинейной целевой функцией и/или нелинейными ограничениями в виде равенств или неравенств решают методами *нелинейного программирования*. Не существует эффективных методов решения этих задач. Используемые в САПР программные средства реализуют частные задачи, не обеспечивая получения глобального минимума, либо стараются свести эти задачи с помощью преобразований к линейной форме.

Например, задача поиска оптимального проектного рельефа имеет целевую функцию:

$$F(z) = \sum_{i=1}^N (z_i - z_i^*)^2 \rightarrow \max$$

Целочисленное программирование, решает задачи оптимизации функции нескольких переменных, связанных рядом уравнений и/или неравенств, удовлетворяющих условию целочисленности. Условие целочисленности переменных формально отражает физическую неделимость объектов (например, количество остановок транспорта, выбор вариантов перемещений); а также конечность множества допустимых вариантов, на которых проводится оптимизация (например, множество перестановок в задаче сортировки).

Общий вид задачи: минимизировать функцию $\sum_{j=1}^N c_j x_j$ при ограничениях ; $\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, M;$
 $x_j \geq 0, j = 1, \dots, N; x_j - \text{целые для } j = 1, \dots, p; p \leq N,$
 где a_{ij}, b_i, c_j – заданные целые числа; x_j – переменные.