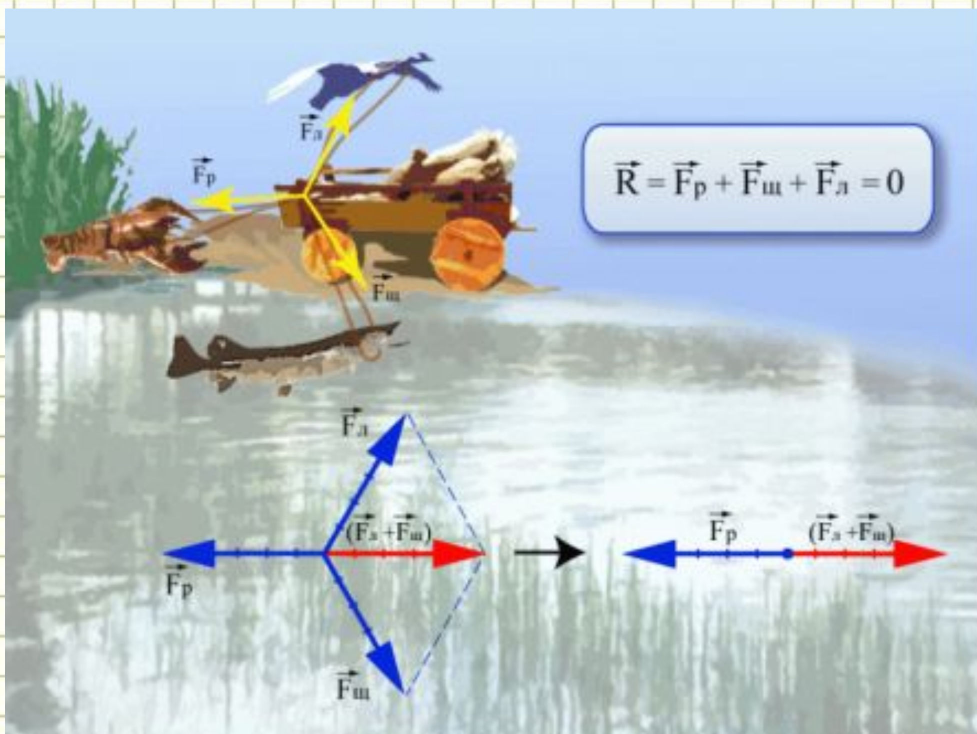
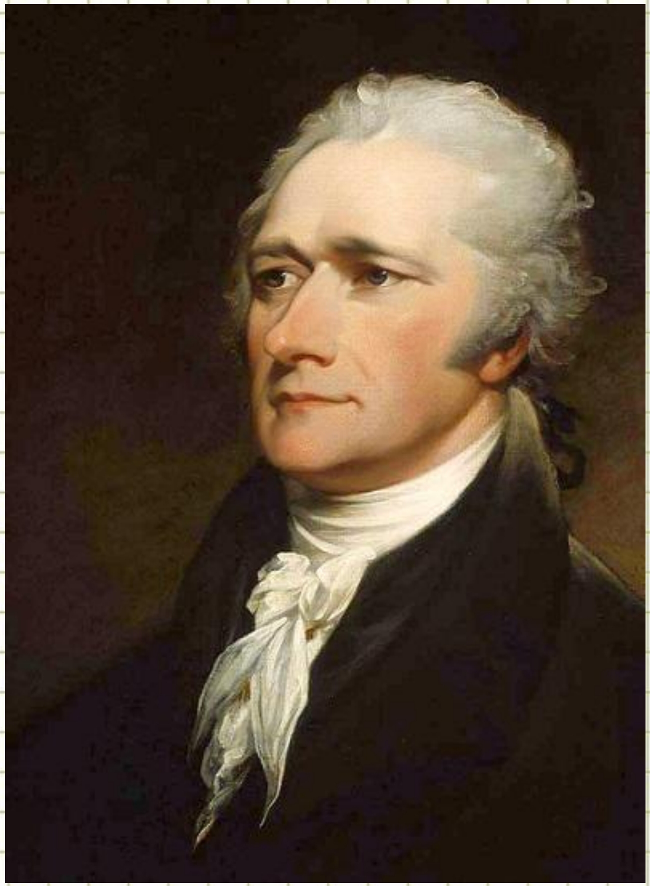
Вектори в просторі.

Рівень стандарту.

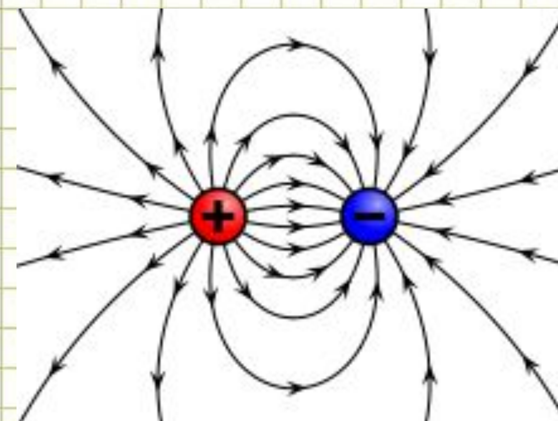
10 клас.



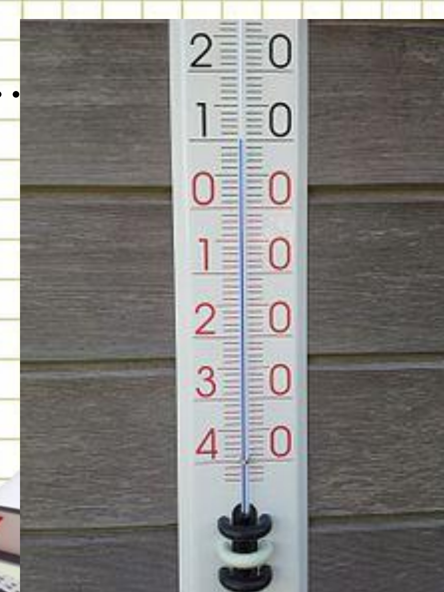
1844 -1850 р.р. - основи векторного числення були закладені дослідженнями англійського математика У. Гамільтона і німецького математика Г. Грассмана по гіперкомплексних числах.



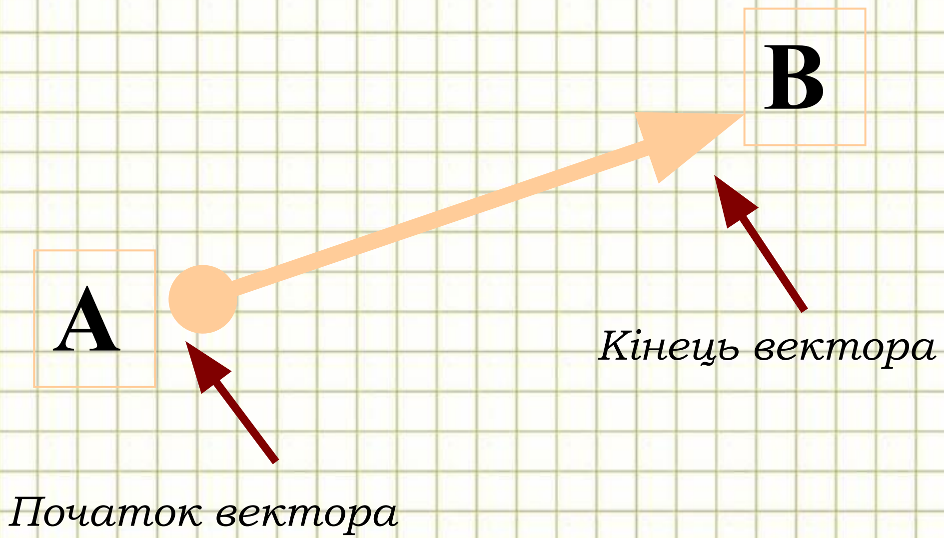
Векторні величини: сила, швидкість, імпульс, прискорення….



В природі існують невекторні (скалярні) величини: маса, об'єм, температура, час, ..

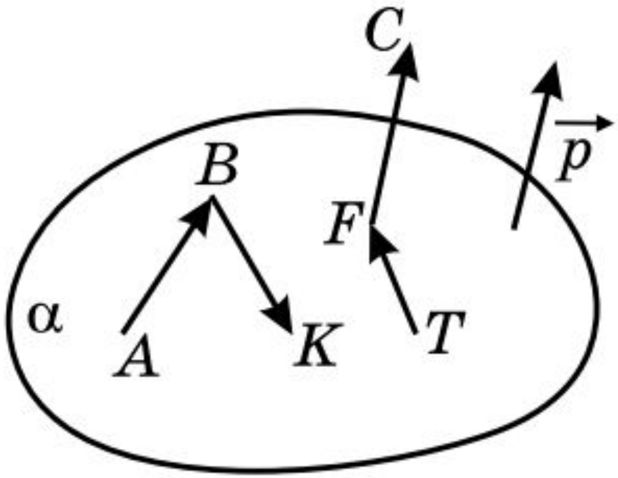


Вектором *називається напрямлений відрізок, з яким можна виконувати математичні дії.*

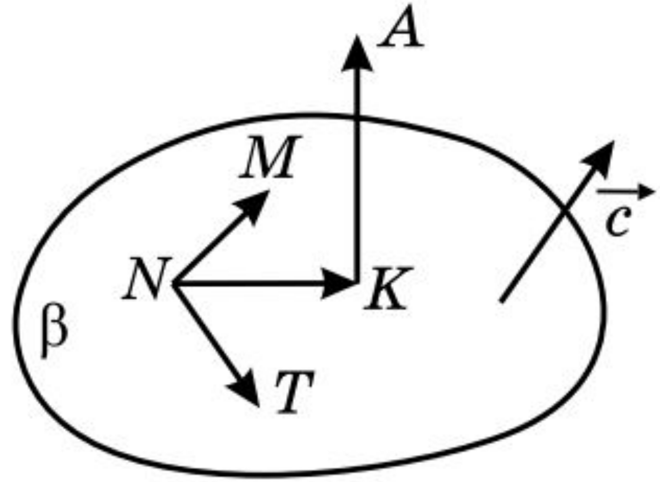


$\overrightarrow{AB}$

Назвати вектори зображені на малюнках

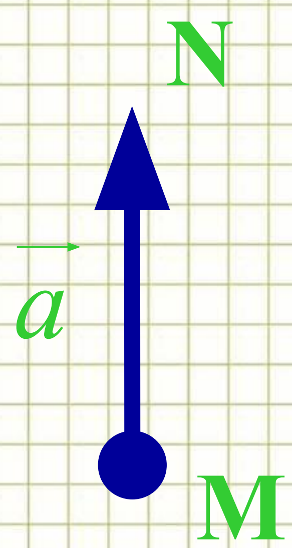


Мал. 12.11



Мал. 12.12

Довжина вектора



вектор $\overrightarrow{MN}$ або вектор $\vec{a}$

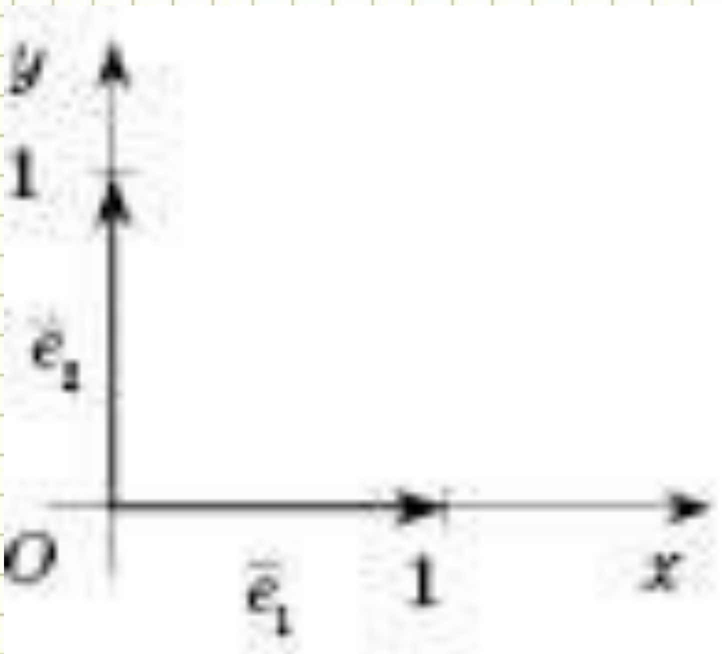
Довжиною (модулем, абсолютною величиною) вектора називають довжину відрізка MN.

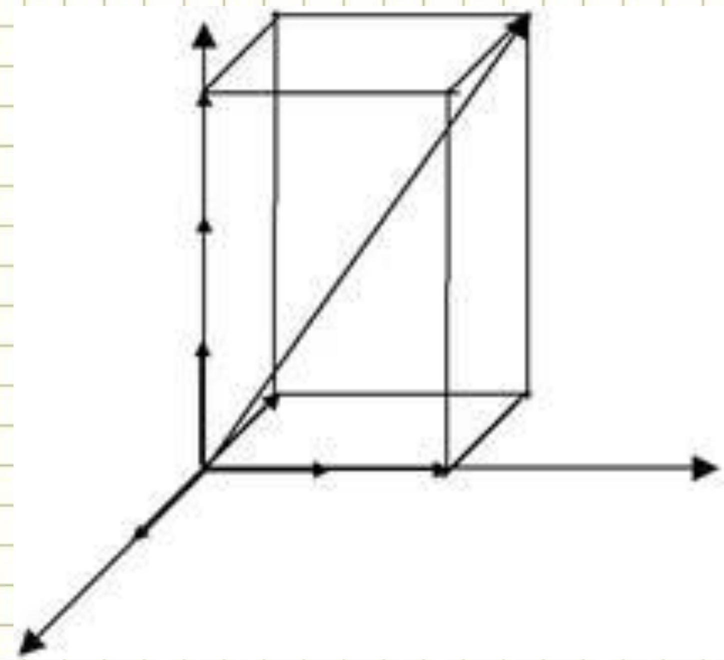
$|\overrightarrow{MN}| = |\vec{a}|$ *довжина вектора* $\overrightarrow{MN}$

- **K** вектор $\overrightarrow{KK}$ або нуль- вектор

$\boxed{|\overrightarrow{KK}| = 0}$

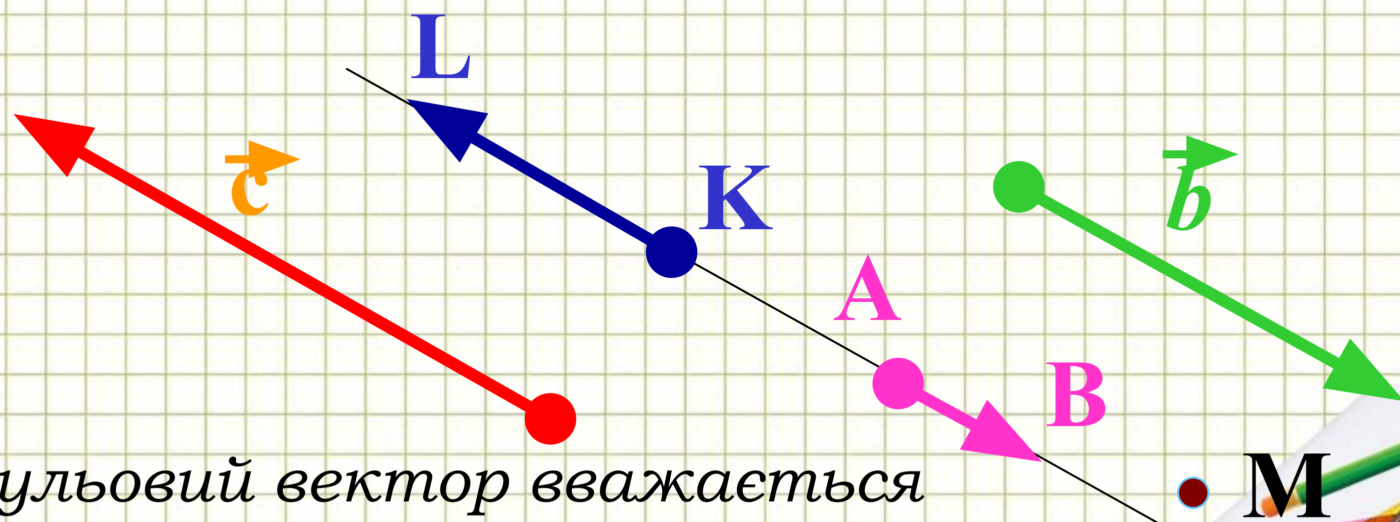
Означення. **Одиничним вектором** або **ортом -** називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.





Колінеарні вектори

Колінеарними називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.



Нульовий вектор вважається колінеарним любому вектору.

Умова колінерності векторів

Вектори колінеарні $\Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow$

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}$$

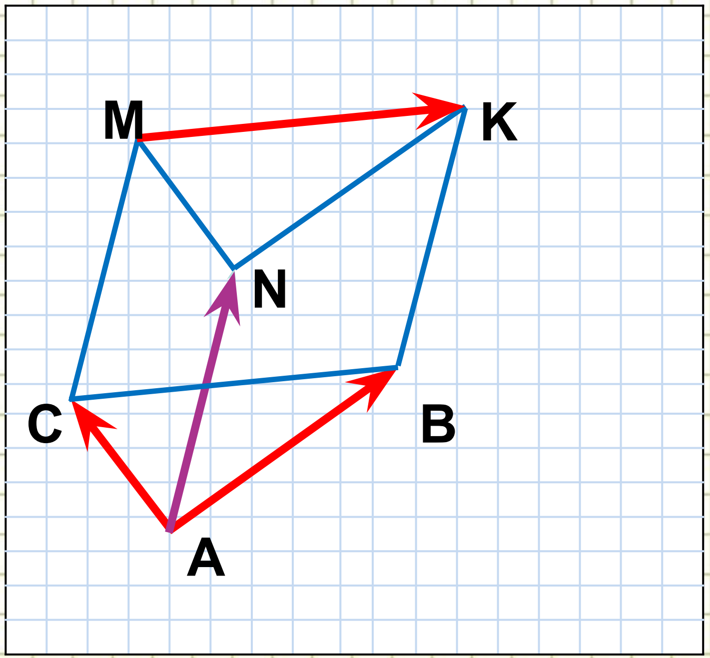
(відповідні координати пропорційні)

Вектори з координатами (2;4;-6) та (1;2;-3) колінеарні, тому що

$$\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3}$$

Компланарні вектори -неколінеарні вектори, що належать паралельним площинам (одній площині), записують як

$$\vec{a} + \vec{b}$$



Компланарні

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MK}$

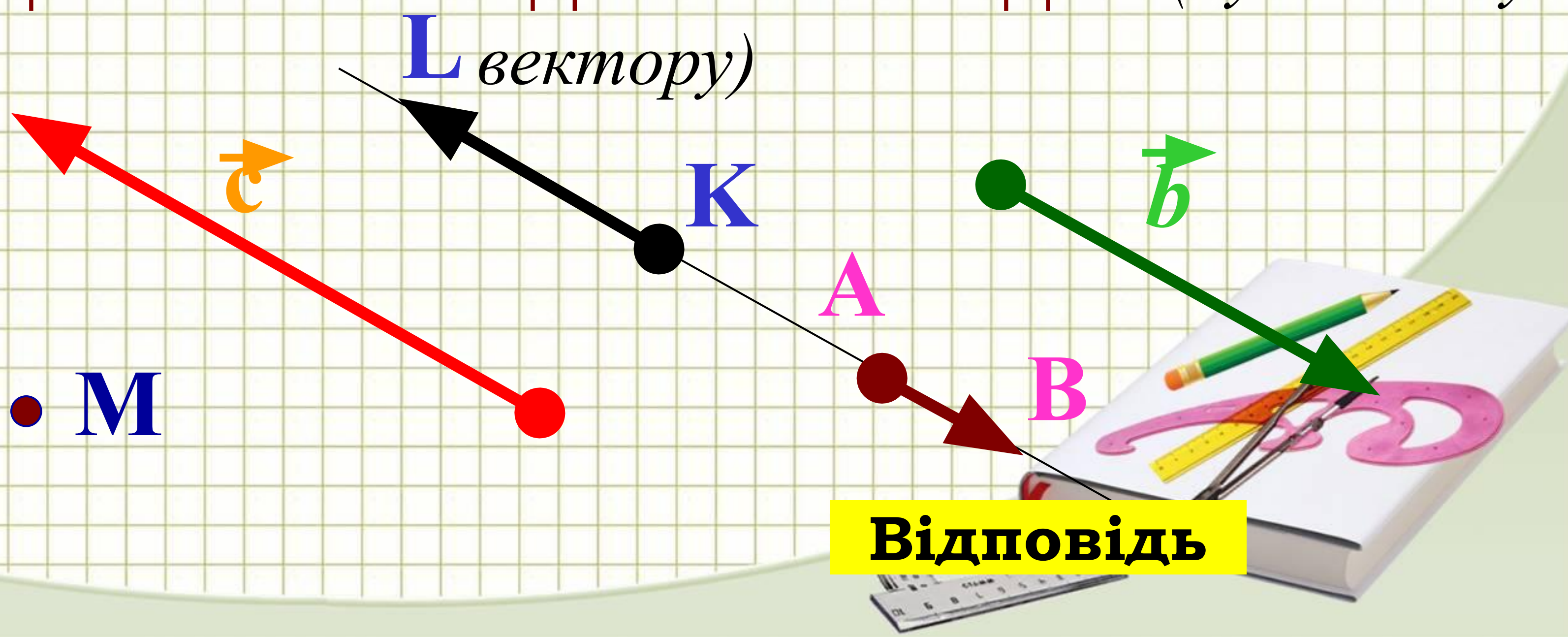
Не компланарні

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}$

Співнапрямлені вектори

Колінеарні вектори, які мають однаковий напрям, називаються ***співнапрямленими*** векторами.

$\vec{c} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{b}$ $\overrightarrow{MM} \uparrow\uparrow \vec{c}$ *(будь-якому вектору)*



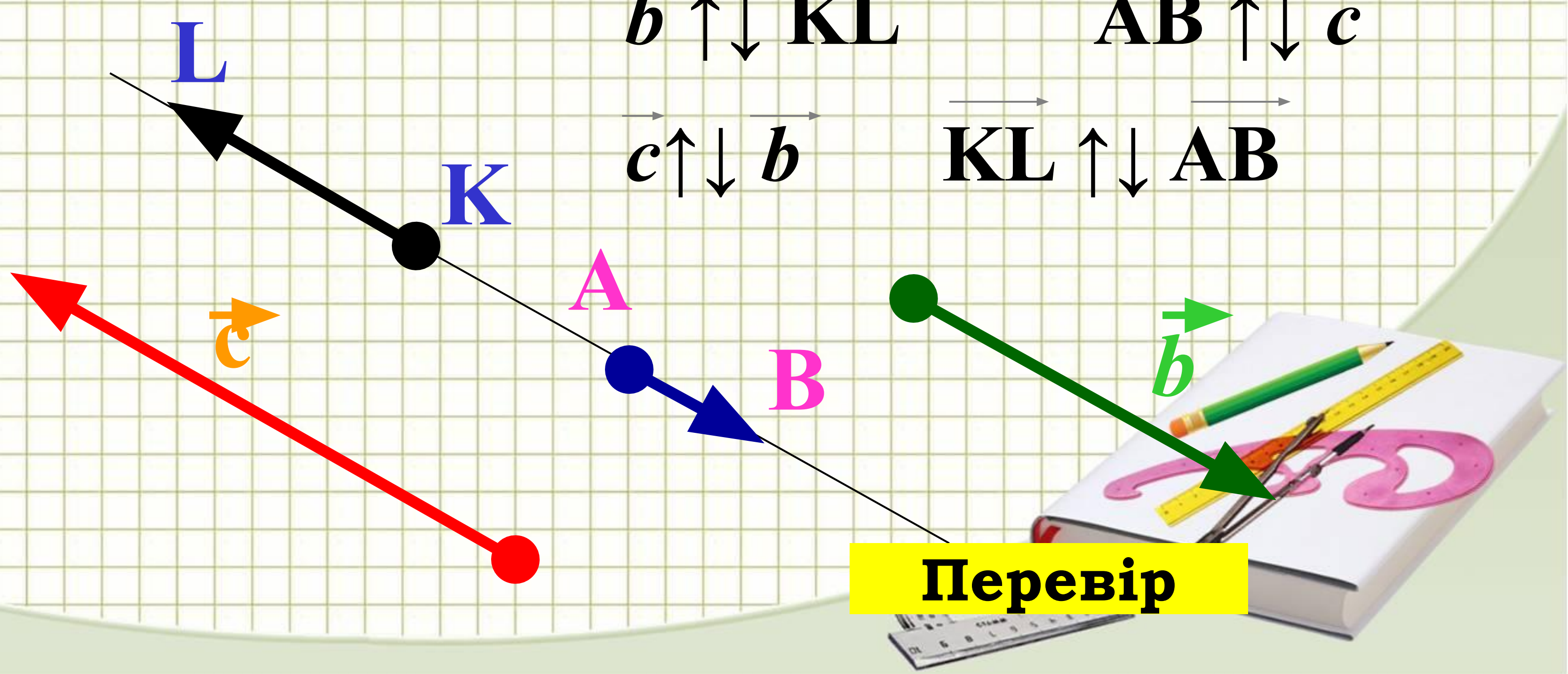
Відповідь

Протилежно направлені вектори

Колінеарні вектори, які мають різні напрями, називаються ***протилежно прямленими*** векторами.

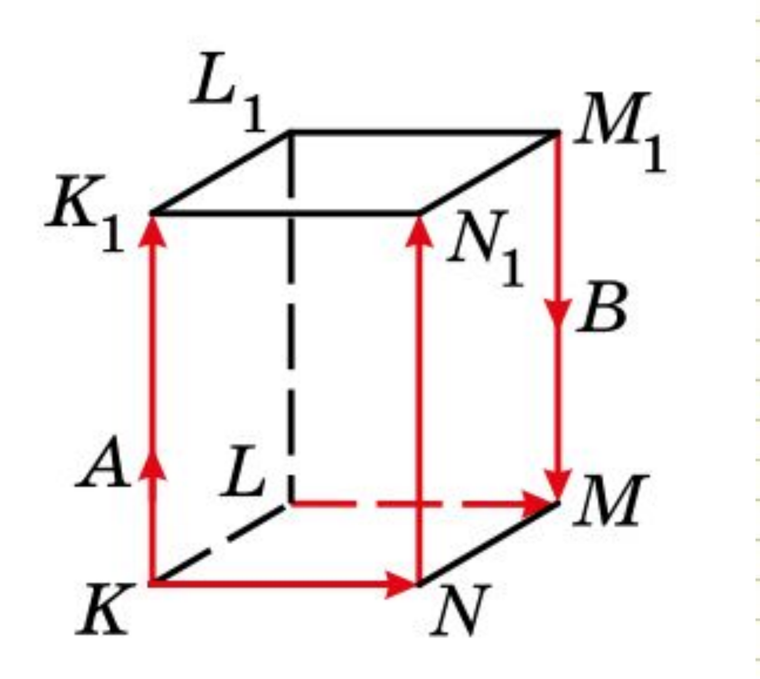
$\vec{b} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \vec{c}$

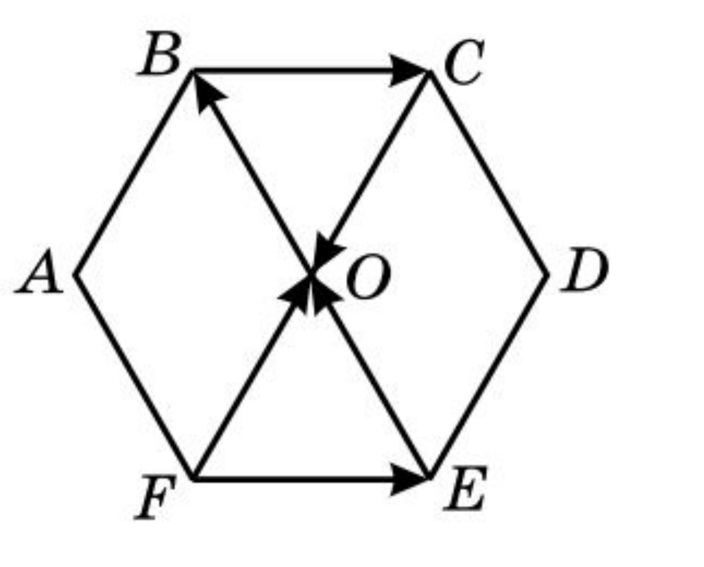
$\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{b}$ $\overrightarrow{KL} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$



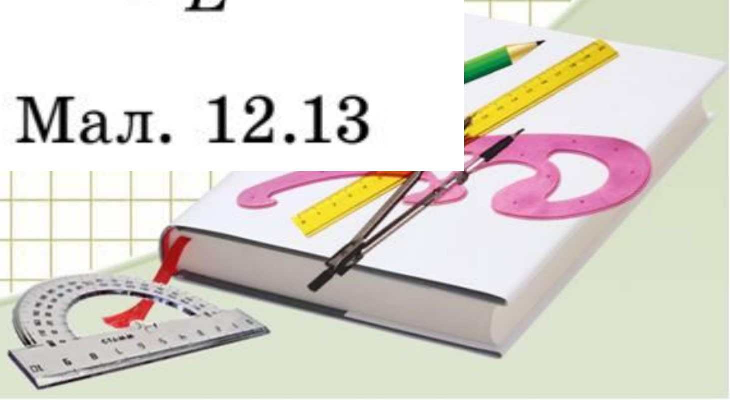
два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені та їх модулі між собою рівні.

Назвати: рівні вектори; співнапрямлені вектори, колінеарні вектори.



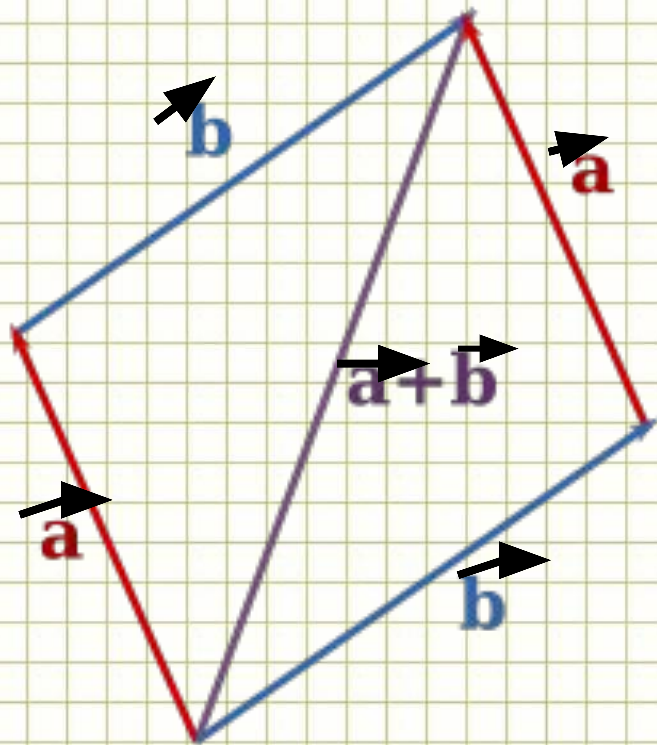


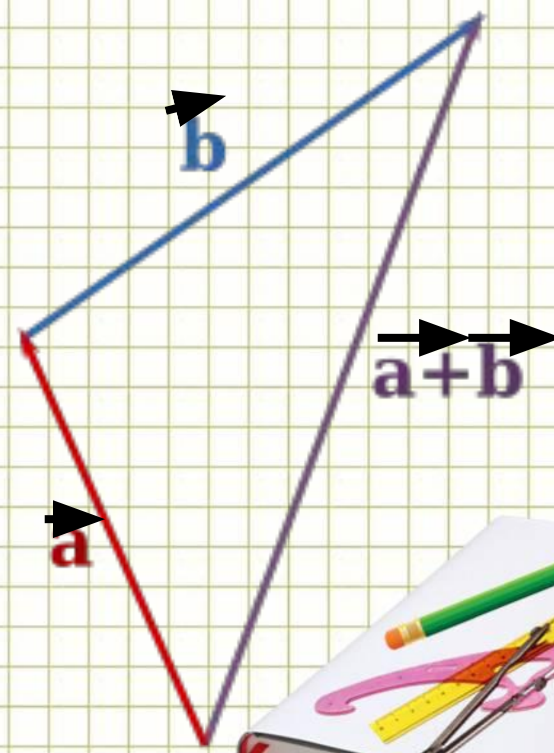
Мал. 12.13



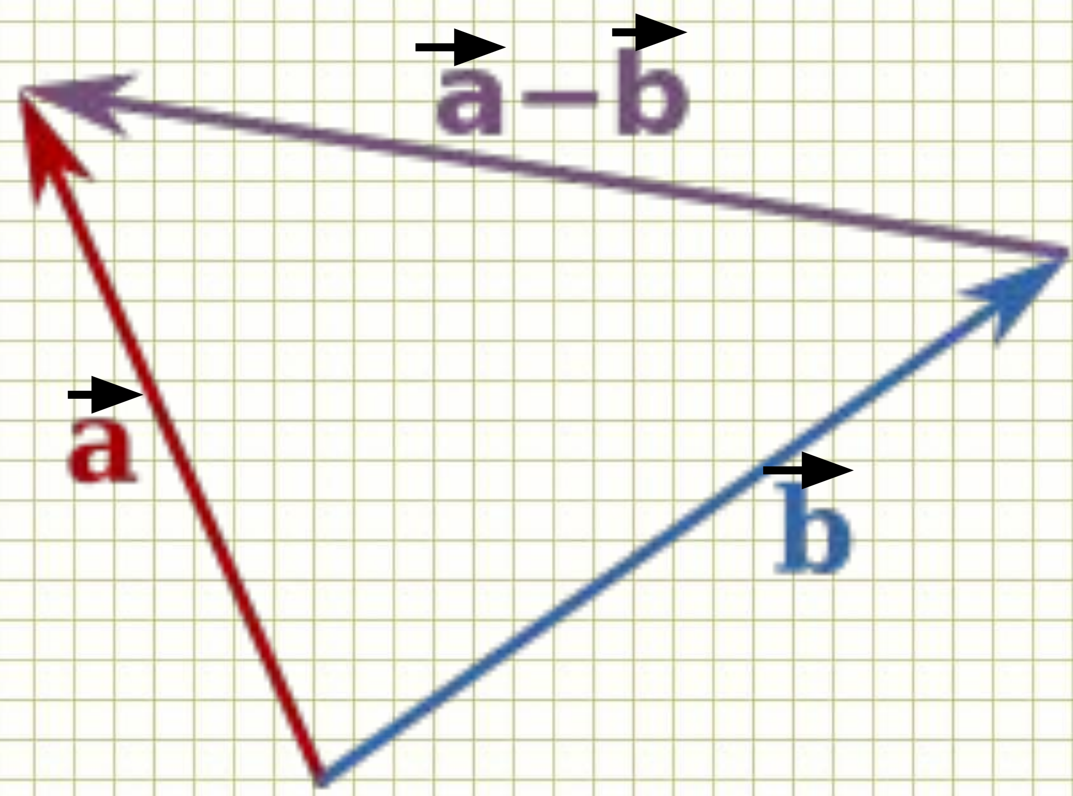
Додавання векторів

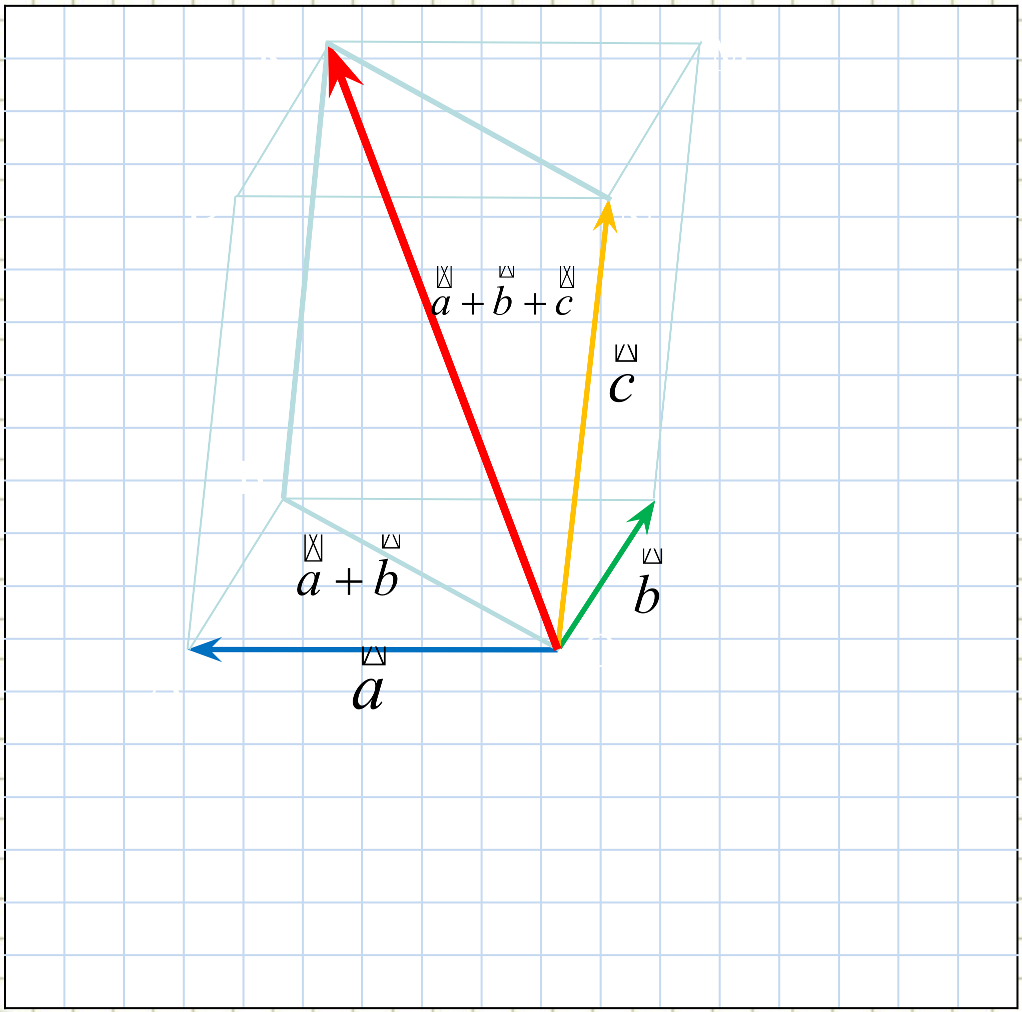
Правило трикутника, паралелограма





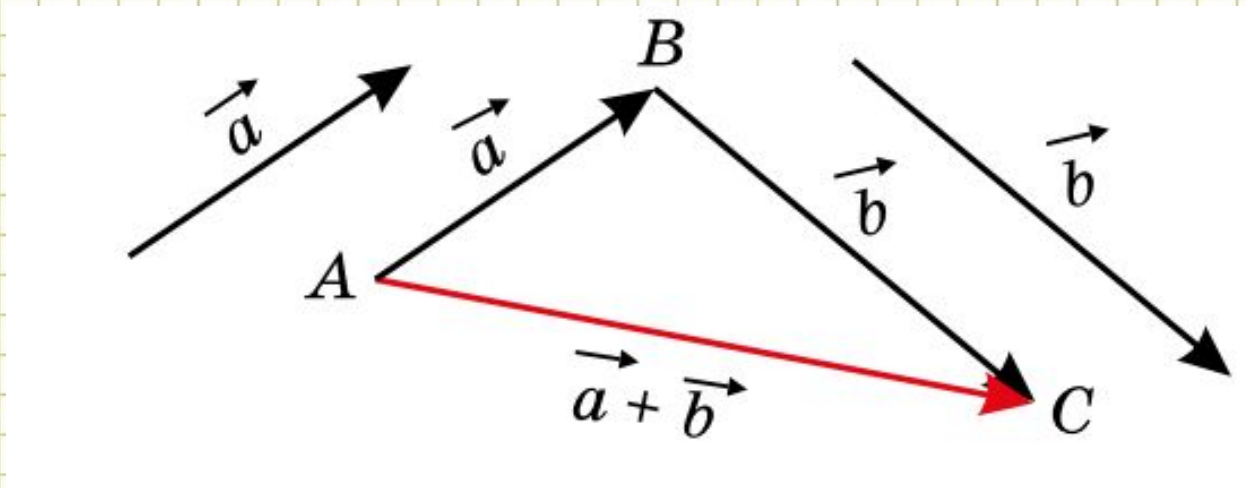
Віднімання векторів





Правило паралелепіпеда

для будь-яких трьох точок A, B і C справджується рівність: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 12.5).



- *переставна властивість додавання:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- *сполучна властивість додавання:* $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

$\vec{a}$ $\vec{b}$

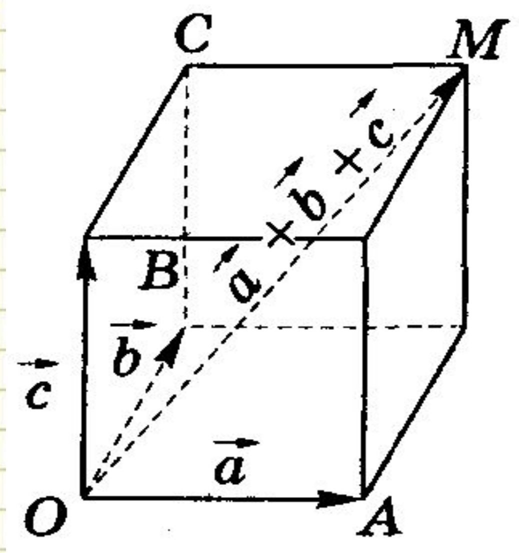
- **Сума векторів (рис. *б*)**
- $(a_x; a_y; a_z) + (b_x; b_y; b_z) = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z)$.
- OA + OB + OC = OM
- **Різниця векторів (рис. в)**

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$

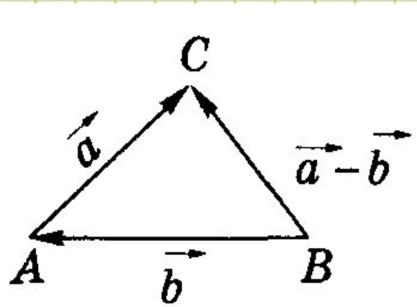
- $(a_x; a_y; a_z) - (b_x; b_y; b_z) = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$.
- AC – AB = BC

$\vec{a}$ $\vec{c}$

- **Добуток вектора на число**
- $\lambda\cdot (a_x; a_y; a_z) = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$
- **Колінеарні вектори**
- і колінеарні, якщо
- $\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda\cdot$



б



в

Приклади розв'язування вправ

Приклад . Існують точки $A(2;\ 0;\ 1)$, $B(3;\ 5;\ 0)$, $C(-1;\ 2;\ 3)$.
Знайти координати вектора $\vec{n} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2;\ 5-0;\ 0-1) = (1;\ 5;\ -1);$$

$$\overrightarrow{BC} = (-1-1;\ 2-5;\ 3-0) = (-4;\ -3;\ 3).$$

Скориставшись правилами виконання дій над векторами, заданими координатами, маємо:

$$2\overrightarrow{AB} = 2\cdot(1;\ 5;\ -1) = (2;\ 10;\ -2);$$

$$3\overrightarrow{BC} = 3\cdot(-4;\ -3;\ 3) = (-12;\ -9;\ 9).$$

$$\vec{n} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = (2;\ 10;\ -2) - (-12;\ -9;\ 9) = (14;\ 19;\ -11).$$

- Задача 1. Дано $\vec{a}$(-1; 2; -3), $\vec{b}$ (2; -1; 3). Знайдіть координати векторів

$\overrightarrow{2\cdot a}$ $\quad -3\vec{b}$ $\quad 2\cdot\vec{a}+3\cdot\vec{b}$ $\quad 2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}$

$1)\ 2\vec{a}=(2\cdot(-1);\ 2\cdot 2;\ 2\cdot(-3))$ $\qquad 1)\ 2\vec{a}=(-2;\ 4;\ -6)$

$2)\ -3\vec{b}=(-3\cdot 2;\ -3\cdot(-1);\ -3\cdot 3)$ $\qquad 2)\ -3\vec{b}=(-6;\ 3;\ -9)$

$3)\ 2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=(-2+;4;-6)+(-6;3;-9)$ $\qquad 3)\ 2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=(-8;7;-15)$

$3)\ 2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=(-2+;4;-6)-(-6;3;-9)$ $\qquad 3)\ 2\cdot\vec{a}-3\cdot\vec{b}=(4;1;3)$

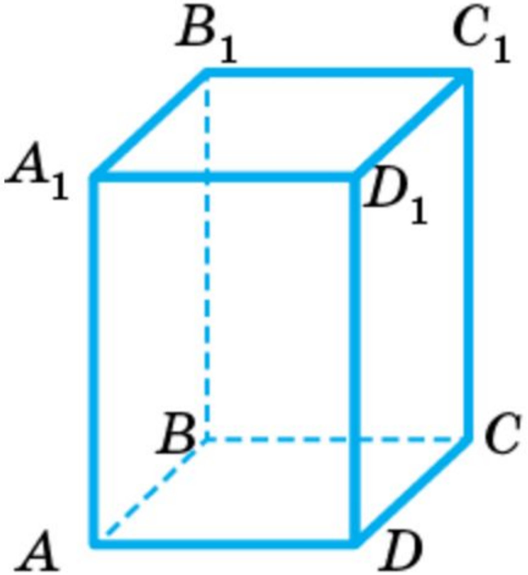
12.18. Не виконуючи побудови, знайдіть:

1) $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{TB}$;
2) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BK}$;
3) $\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{MK}$;
4) $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{TM}$.

12.22. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, якщо він дорівнює сумі:

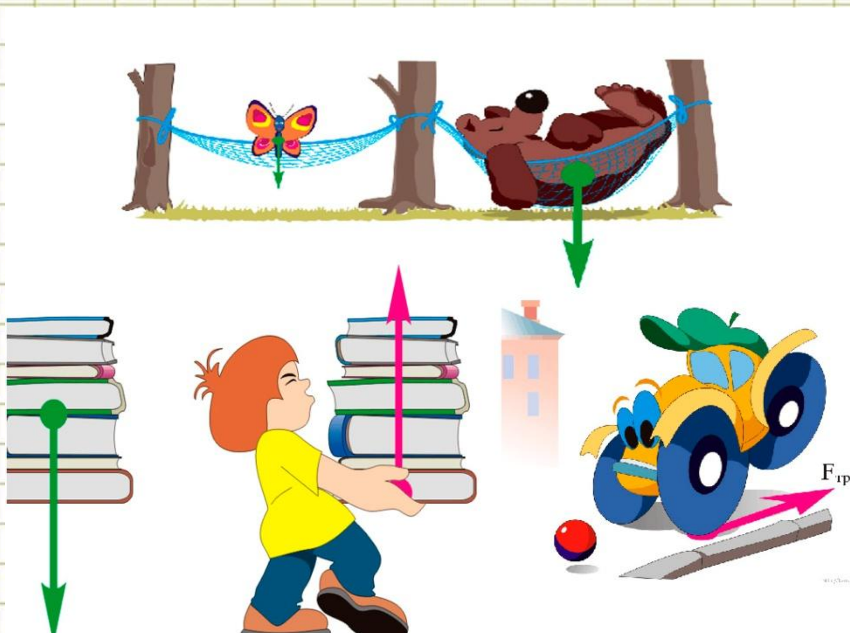
1) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{A_1D_1}$;
2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$.

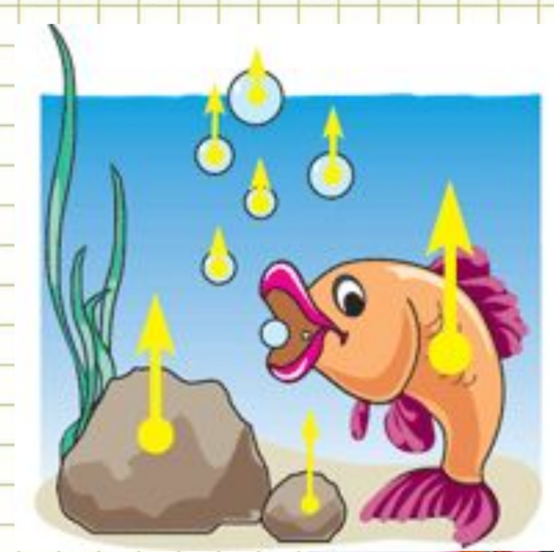
12.28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед. Знайдіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}$.



Задача 3. Спростити вираз: $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c})$.

12.32. Модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відмінні від нуля, до того ж ці вектори неколінеарні. Знайдіть m і n, якщо $4\vec{a} + n\vec{b} = m\vec{a} + 3\vec{b}$.





Вправи на тему додавання і віднімання двох векторів в просторі.

- Знайдіть значення суми та різниці векторів:

1. $\vec{a} = (14; 13; -20)$

   $\vec{b} = (17; -5; 10)$

2. $\vec{a} = (-11; -8; 4)$

   $\vec{b} = (3; 16; -17)$

3. $\vec{a} = (-4; 14; -15)$

   $\vec{b} = (4; 16; -3)$