МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Сарычева Ирина Анатольевна

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

§1 Предел функции

Определение. *Функцией* называется правило, по которому каждому элементу $x \in A$ ставится в соответствие один и только один элемент $y \in B$.

$$y = F(x)$$

Определение 2. (по Коши)

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных a, и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Определение 5. Число A называется левым (правым) односторонним пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева (справа), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε, $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0, и удовлетворяющих условию

$$x_0 - \delta < x < x_0 \ (x_0 < x < x_0 + \delta),$$

выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

$$f(x) \underset{x \to x_0 - 0}{\to} A, \qquad f(x) \underset{x \to x_0 + 0}{\to} A$$

§ 2 Основные теоремы о пределах функций

Теорема 1. Функция не может иметь более одного предела.

Теорема 2.

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a\pm b$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=ab$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{b},\quad b\neq 0$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x))=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, где $c=const$.

§ 3 Бесконечно малые величины

Определение 1. Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** величиной при $x \to x_0$, или при $x \to \infty$, если её предел равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Теорема 2. (свойства бесконечно малых величин)
1) Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.
2) Произведение бесконечно малой величины на ограниченную (в том числе на постоянную, на другую бесконечно малую) есть величина бесконечно малая.
3) Частное от деления бесконечно малой на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

§4 Бесконечно большие величины

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой величиной** при $x \to x_0$, если для любого даже сколь угодно большого числа $M > 0$, найдется такое число $\delta > 0$ (зависящее от M, $\delta = \delta(M)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будет верно неравенство $|f(x)| > M$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$$f(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \infty$$

Теорема 1. (свойства б. б. величин)

1) Произведение бесконечно большой величины и функции, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

2) Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

3) Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

Теорема 2.

1) Если функция $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$,

то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является

бесконечно большой при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

2) Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$,

то функция $\alpha(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ есть

бесконечно малая при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$.

§ 5 Замечательные пределы

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Следствия:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha, \quad \alpha\in R$

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $x \to 0$

$$\sin x \sim x;$$

$$\operatorname{tg} x \sim x;$$

$$\arcsin x \sim x;$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$\ln(1+x) \sim x;$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a};$$

$$(e^x - 1) \sim x;$$

$$(a^x - 1) \sim x \cdot \ln a;$$

$$((1+x)^\alpha - 1) \sim \alpha x \quad (\alpha \neq 1,2,3,\ldots)$$

§6 Непрерывные функции. Точки разрыва

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

1) $f(x)$ определена в точке x_0;

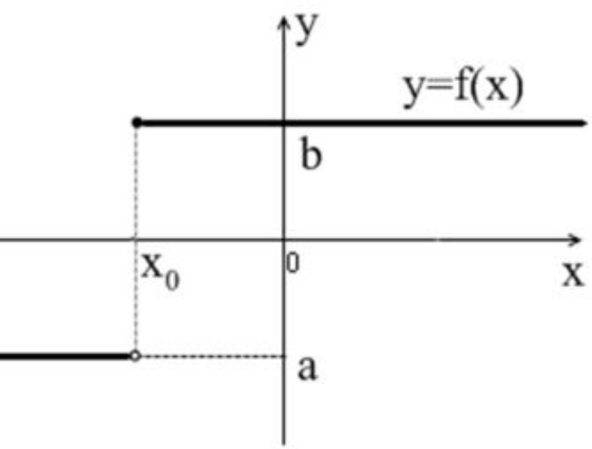
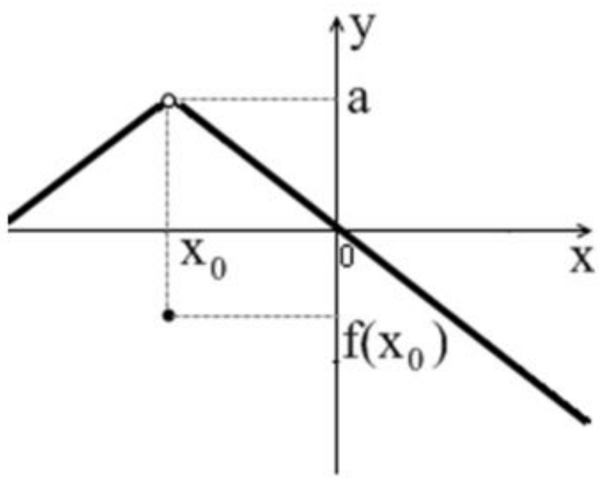
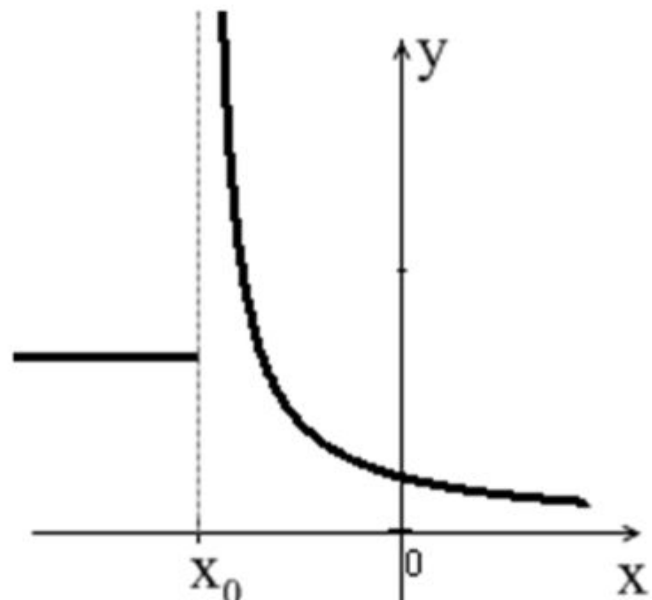
2) имеет конечный предел при $x \to x_0$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если функция непрерывна в каждой точке множества, то говорят, что функция непрерывна на множестве.

Определение 2. Если в некоторой точке a функция не является непрерывной, то говорят, что a - точка разрыва функции.

Точки разрыва

Точки разрыва I рода		Точки разрыва II рода
Точки скачка	Точки устранимого разрыва	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$, или хотя бы один не существует
$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b$, $a \neq b$	$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = a$, $f(x_0) \neq a$	
		

Свойства функций, непрерывных в точке.

Теорема 1 (о стабилизации знака).

Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0 и принимает в этой точке положительное (отрицательное) значение, то существует окрестность точки x_0, в которой значение функции остается положительным (отрицательным).

Теорема 2 Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, произведение и частное (при условии $g(x_0) \neq 0$) являются функциями, непрерывными в точке x_0.

Теорема 3. Если функция f непрерывна в точке x_0, а функция g непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция (композиция) $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Теорема 4. Все элементарные функции непрерывны в естественной области определения.

Теорема 5. (первая теорема Больцано – Коши). Если непрерывная на отрезке функция на концах этого отрезка принимает значения разных знаков, то внутри отрезка существует точка, значение функции в которой равно нулю.

Теорема 6. (вторая теорема Больцано – Коши) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$, то для всякого числа C, лежащего между A и B, найдется число с, лежащее между а и b такое, что $f(c)=C$

Теорема 7. (первая теорема Вейерштрасса). Непрерывная на отрезке функция ограничена на этом отрезке.

Теорема 8. (вторая теорема Вейерштрасса). Функция непрерывная на отрезке достигает на этом отрезке своих точных границ, т.е. имеет на отрезке наибольшее и наименьшее значения.