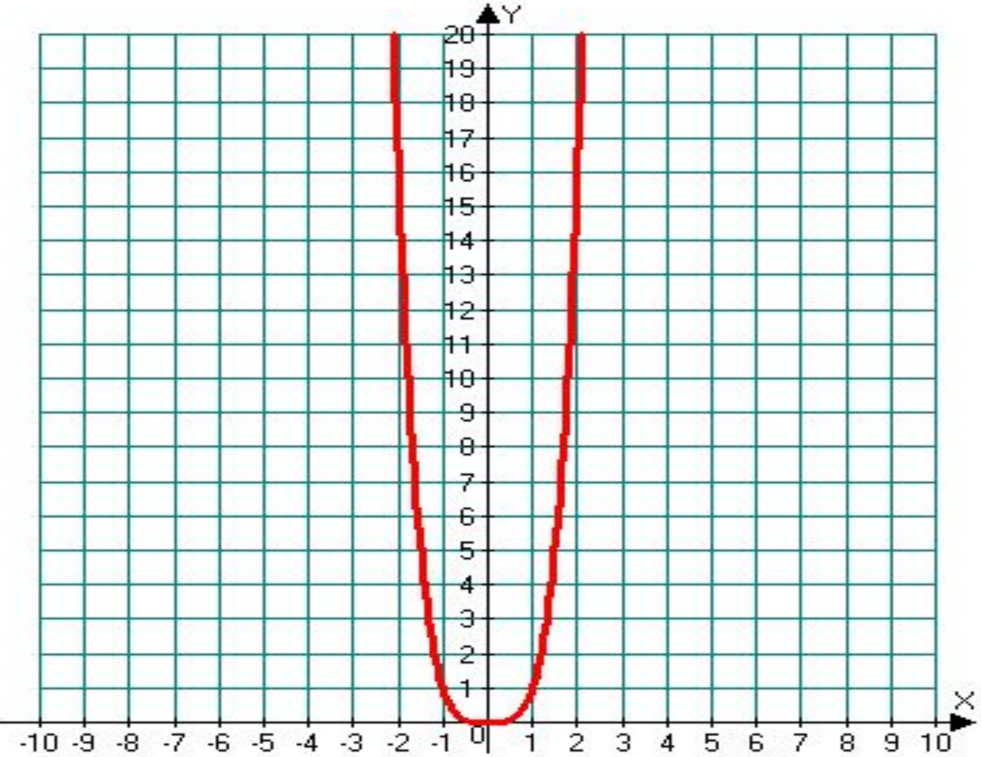
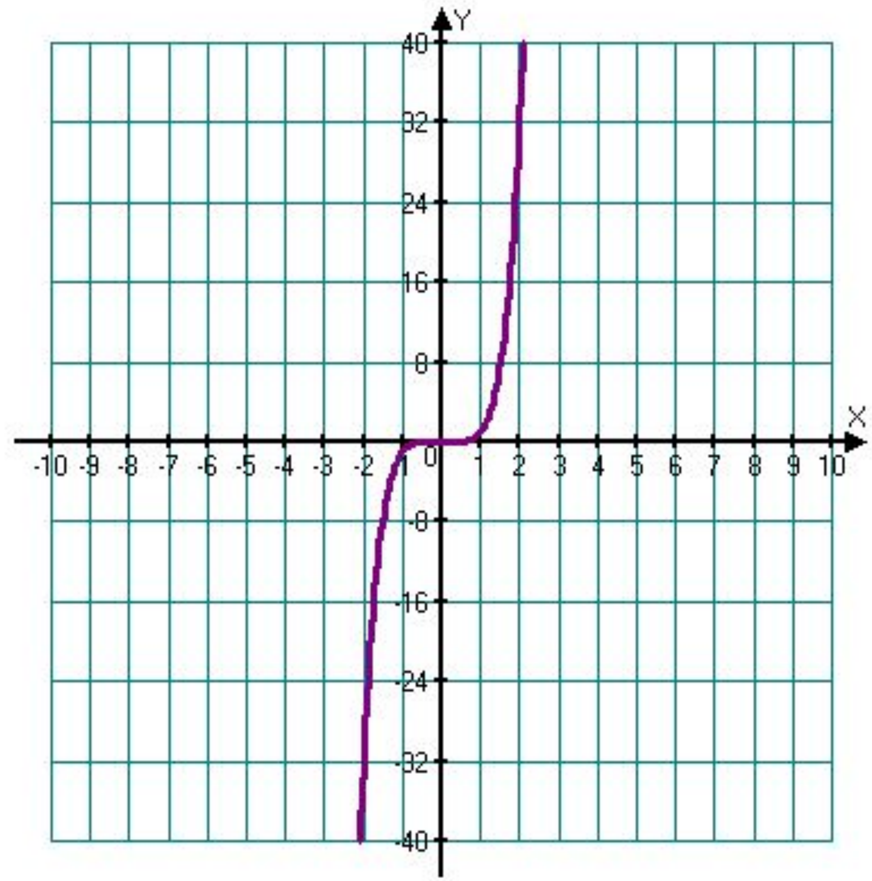
Корень n-ой степени и его свойства


Y
X
0
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10


Y
X
0
40 32 24 16 8 -8 -16 -24 -32 -40
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Определение:

Корнем n-ной степени из числа a называется такое число, n-ная степень которого равна a.

$$\sqrt[n]{a} = b;$$

$$b^n = a$$

Например:

Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.

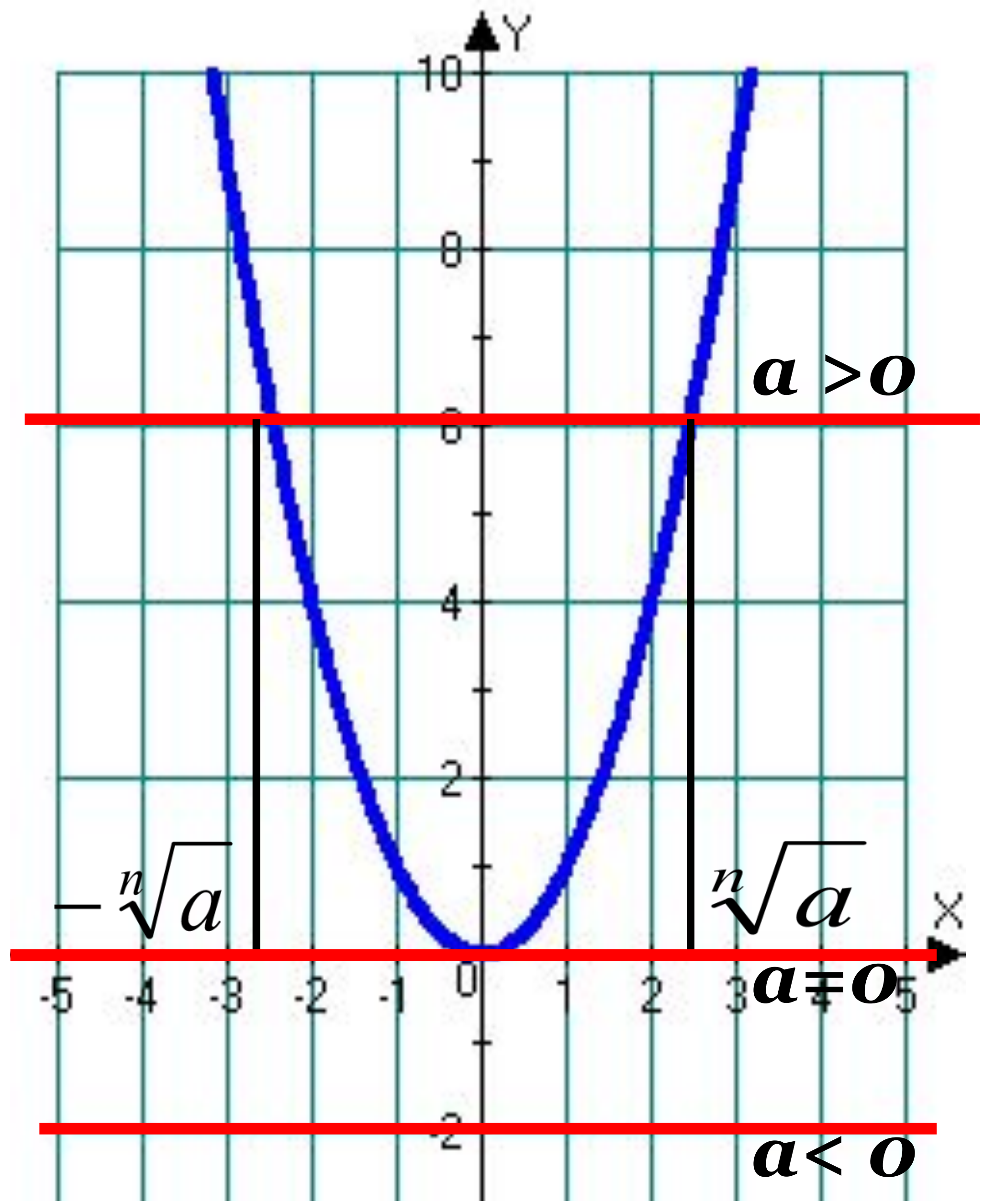
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

n- чётное число

$$\sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[5]{243} = 3$$

$$\sqrt[6]{-64} - \textit{не существует}$$



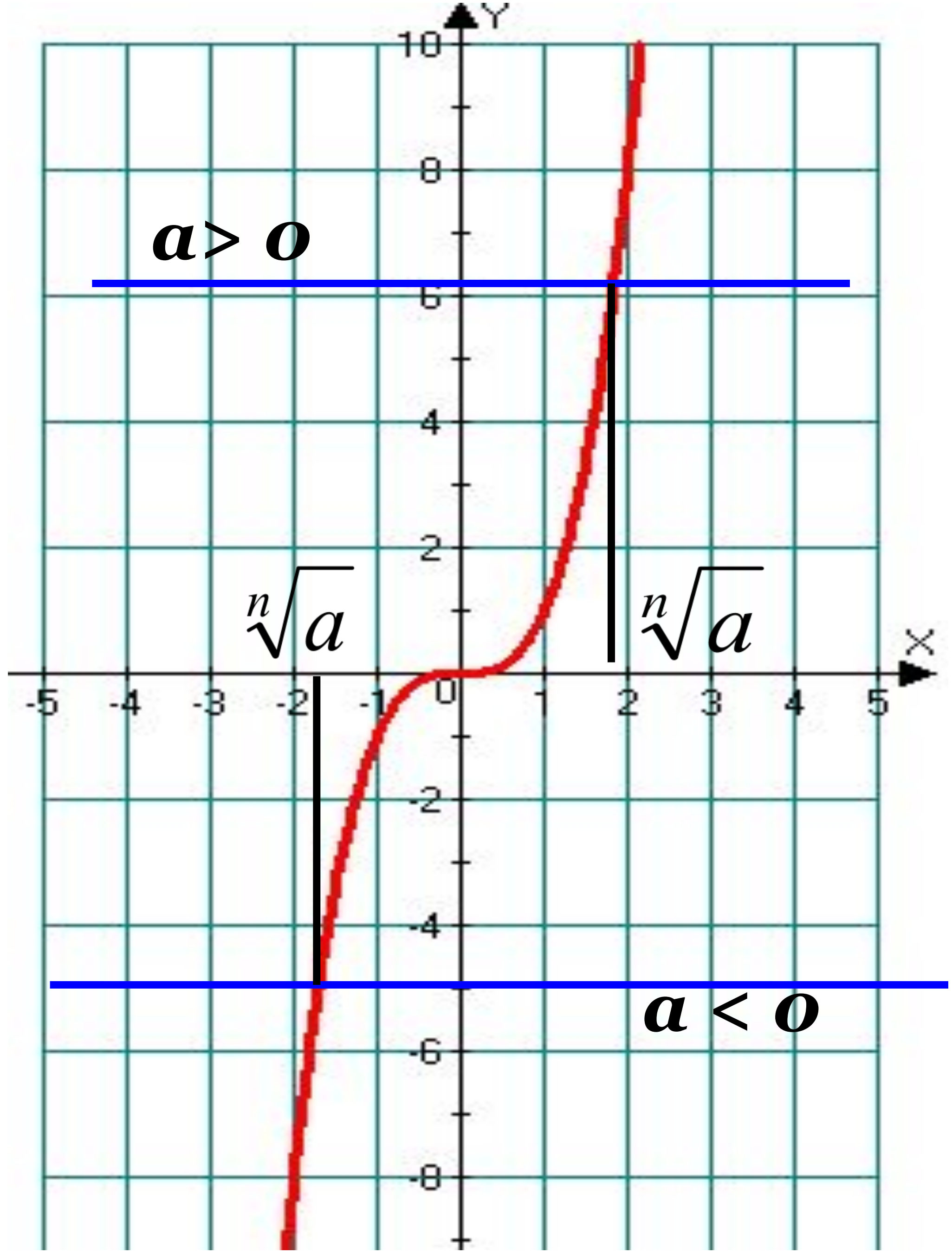
n–нечётное число

$$\sqrt[3]{125} = 5, т.к.$$

$$5^3 = 125,$$

$$\sqrt[7]{-128} = -2, т.к.$$

$$(-2)^7 = -128$$



Например:

Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$. Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Число корней данного уравнения зависит от n и a.

- **Например:**

Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$. Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$.

Арифметический корень n-ой степени

Арифметическим корнем n-й степени из числа а называют <u>неотрицательное число</u>, n-я степень которого равна а.

<u>Например:</u>
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и −2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

<u>Например:</u>
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Терминология

__Например:__
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

√ - радикал

n - показатель корня

a - подкоренное число (выражение)

Примеры:

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$. Или числа 2 и −2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:

Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$. Или числа 2 и −2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Рассмотрим примеры:

1) Решите уравнение:

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из
числа 64, так как $2^6 = 64$ и
$(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из
числа 64, так как $2^6 = 64$ и
$(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из
числа 64, так как $2^6 = 64$ и
$(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из
числа 64, так как $2^6 = 64$ и
$(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из
числа 64, так как $2^6 = 64$ и
$(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа
27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются
корнями шестой степени из

Рассмотрим примеры:

2) Решите уравнение:

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из

Таким образом, делаем вывод:

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и −2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

При n-чётном существуют два корня n-й степени из любого положительного числа a;

корень n-й степени из числа 0 равен нулю;

корней чётной степени из отрицательных чисел не существует.

При **нечётном n** **существует корень n-й степени из любого числа a,** и притом только один!

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Например:
Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как $3^3 = 27$.
Или числа 2 и -2 являются корнями шестой степени из числа 64, так как $2^6 = 64$ и $(-2)^6 = 64$

Основные свойства корней:

Теорема 1. ***Корень n-ой степени (n = 2, 3, 4, …) из произведения двух неотрицательных чисел равен произведению корней n-ой степени из этих чисел.***

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

Пример 1. ***Вычислить:***

$$\sqrt[3]{27\cdot 64}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{64}=3\cdot 4=12$$

Пример 2. ***Вычислить:***

$$\sqrt[4]{108\cdot 192}=\sqrt[4]{3^3\cdot 4}\cdot\sqrt[4]{3\cdot 4^3}=$$

$$=\sqrt[4]{3^3\cdot 4\cdot 3\cdot 4^3}=\sqrt[4]{3^4\cdot 4^4}=$$

$$=\sqrt[4]{(3\cdot 4)^4}=3\cdot 4=12$$

Теорема 2. ***Корень n-ой степени из отношения неотрицательного числа a и положительного числа b равен отношению корней n-ой степени из этих чисел.***

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

<u>Пример 3.</u>

Вычислить: $\sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

<u>Пример 4.</u>

Вычислить: $\frac{\sqrt[4]{405}}{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[4]{\frac{405}{80}} = \sqrt[4]{\frac{5 \cdot 81}{5 \cdot 16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

<u>Пример 5.</u>

Вычислить:

$$\sqrt[5]{7\frac{19}{32}} = \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Теорема 3. ***Чтобы возвести корень n-ой степени из неотрицательного числа a в натуральную степень k, надо в эту степень возвести подкоренное выражение.***

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

<u>Пример 6.</u>

Вычислить:

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

Теорема 4. ***Чтобы извлечь корень n-ой степени из корня k-ой степени из неотрицательного числа a, надо извлечь корень kn-ой степени из этого числа.***

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

<u>Пример 7.</u>

Упростить выражение:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}} = \sqrt[3\cdot 2]{a} = \sqrt[6]{a}$

б) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[4\cdot 3]{a} = \sqrt[12]{a}$

Теорема 5. ***Если показатели корня и подкоренного выражения умножить или разделить на одно и то же число, то значение корня не изменится.***

$$\sqrt[mp]{a^{kp}} = \sqrt[m]{a^{k}}$$

Пример 8. $a)\ \sqrt[12]{a^{16}} = \sqrt[3]{a^{4}} \quad б)\ \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^{2}}$

Пример 9.

Упростим выражение:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} = \sqrt[12]{a^{6}} \cdot \sqrt[12]{a^{4}} \cdot \sqrt[12]{a^{3}} =$$

$$= \sqrt[12]{a^{6} \cdot a^{4} \cdot a^{3}} = \sqrt[12]{a^{13}}$$

866. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{0{,}125 \cdot 216}$; в) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$; д) $\sqrt[3]{21\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{3}$;

867. Вычислите:

а) $\sqrt[3]{63} \cdot \sqrt[3]{147}$;

в) $\sqrt[3]{8 - \sqrt{56}} \cdot \sqrt[3]{8 + \sqrt{56}}$;

868. Сравните числа:

а) $\sqrt[3]{11}$ и $\sqrt[6]{119}$;

б) $\sqrt[4]{27}$ и $\sqrt[3]{9}$;

г) $\sqrt[3]{\sqrt{27}}$ и $\sqrt[3]{3}$;

д) $\sqrt[3]{7}$ и $\sqrt{3\sqrt[3]{2}}$;

870. Найдите значение дроби:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{49}}{\sqrt[4]{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt[6]{729}}{\sqrt[3]{1728}}$; д) $\dfrac{\sqrt[6]{2\sqrt{2}}}{\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}}$;

871. Упростите выражение:

а) $\sqrt{a^2}$, где $a \leqslant 0$; в) $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, где $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

872. Представьте выражение в виде дроби:

а) $\sqrt{\dfrac{81a^4}{b^2}}$, где $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$;

б) $\sqrt[3]{\dfrac{343x^6}{125y^9}}$;

873. Упростите выражение:

а) $\sqrt[4]{(a-3)^4} + \sqrt{(a-6)^2}$, где $3 \leqslant a \leqslant 6$;

в) $\sqrt{2x^2 - 2x + 3 - \sqrt{x^4 + 4x^2 + 4}}$, где $x \leqslant 1$;

877. Упростите выражение:

а) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}$; б) $\sqrt[4]{b\sqrt[3]{b\sqrt{b}}}$.

878. Представьте в виде квадрата суммы выражение:

а) $a + 2\sqrt{a} + 1$; в) $4x + 12\sqrt[6]{x^3y^2} + 9\sqrt[3]{y^2}$;

Домашняя работа

1. Вычислить $\sqrt[5]{32 \cdot 243 \cdot 1024}$
2. Вычислить $\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}$
3. Вычислить

а) $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt[3]{72}$

б) $\sqrt[5]{1215} : \sqrt[5]{5}$

4. Упростить:

а) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{a}}$ б) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}$ в) $\sqrt{\sqrt[9]{a}}$

5. Выполнить действия:

$$\sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[3]{a^4}$$