



Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного
Знамени

государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

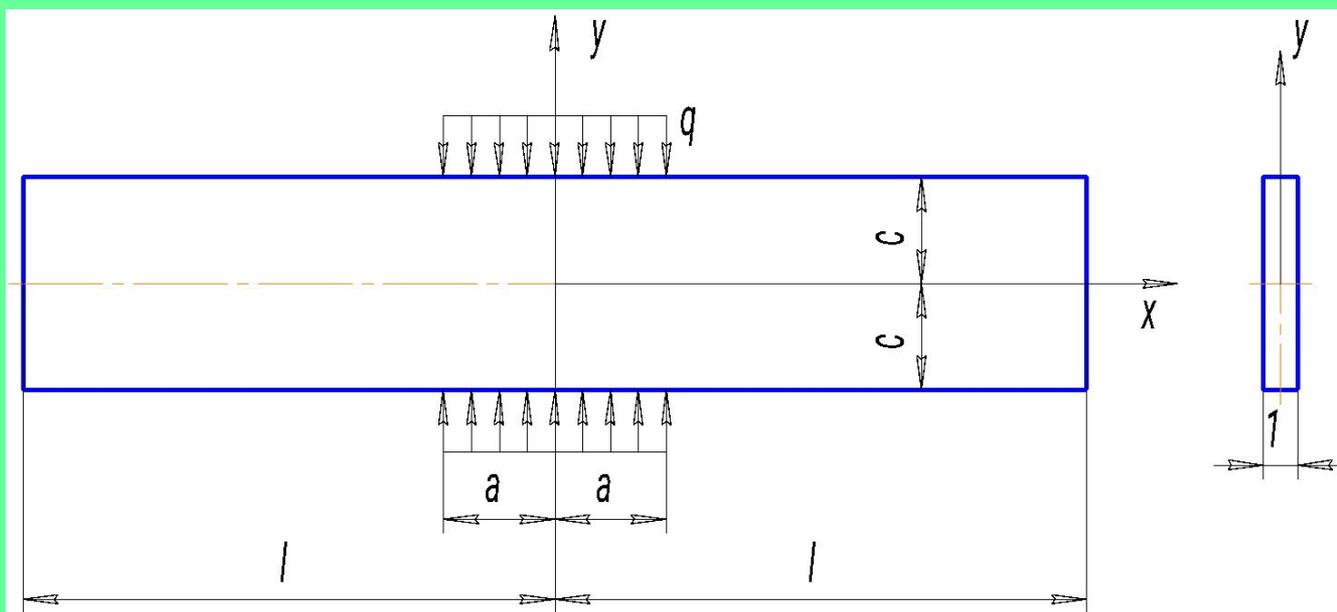
Полоса, нагруженная нормальным давлением на участках границ

Выполнил студент группы РК5-83Б Шишлячѳв А.О.

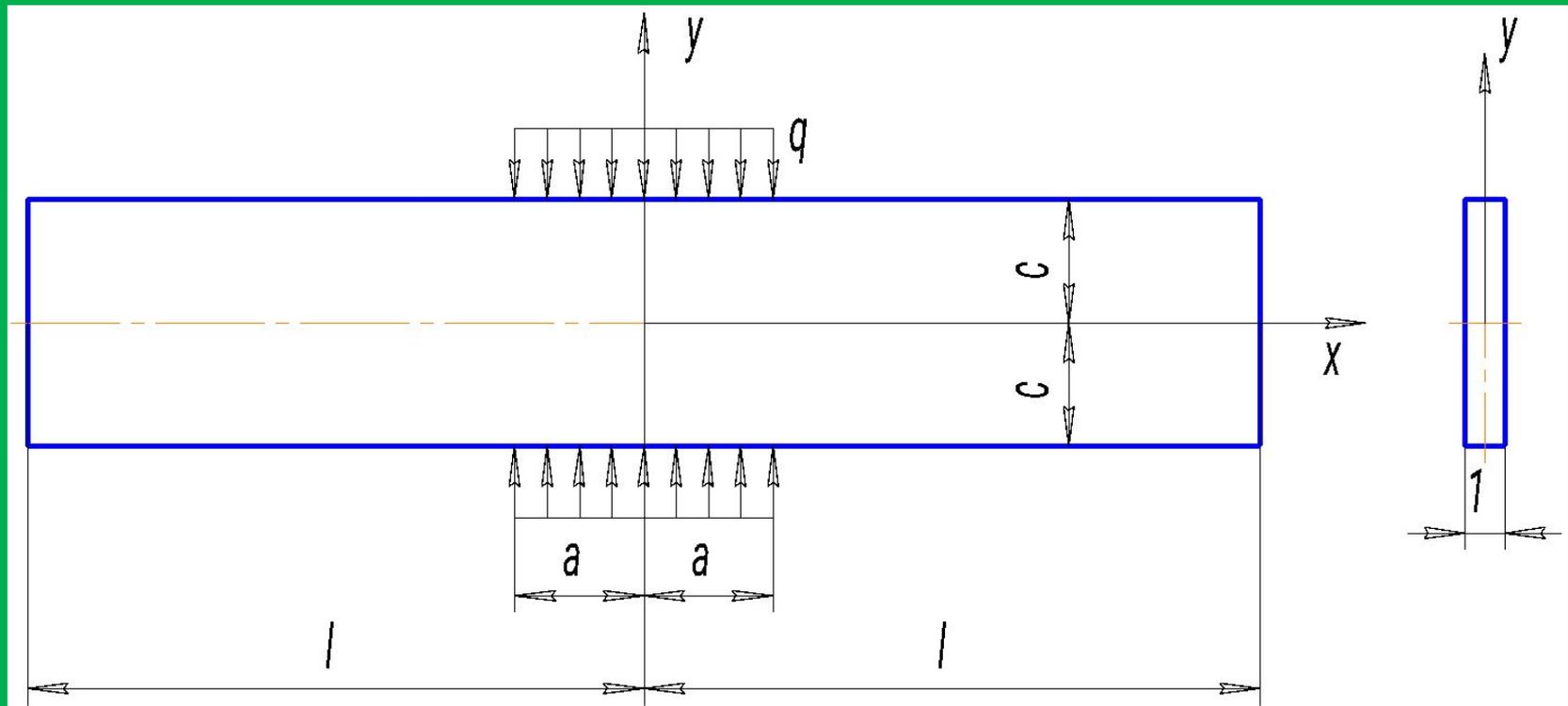
Руководитель: проф. Разумовский И. А.

Москва, 2019

Постановка задачи:



Условие задачи:



Данные о
модели: $a = 10$
мм

$c = 20$ мм $l = 60$
 $q = 0.1$ мм
Н/мм

Решение

Нагрузка:

- на верхней кромке

$$t_1 = -(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\lambda \cdot x))$$

- на нижней кромке

$$t_2 = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \cos(\lambda \cdot x)$$

где $a_0 = b_0 = \frac{1}{2 \cdot l} \int_{-l}^l t_2(x) \cdot dx = \frac{q \cdot a}{l}$

$$a_n = b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l t_2(x) \cos(\lambda \cdot x) dx = \frac{2 \cdot q}{\lambda \cdot l} \sin(\lambda \cdot a), \lambda = \frac{n \cdot \pi}{l}$$

Напряжения под действием симметричной нагрузки

$$\sigma_x = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} \lambda^2 ch(\lambda y) + C_{2n} \lambda^2 sh(\lambda y) + C_{3n} \lambda (2sh(\lambda y) + \lambda y \cdot ch(\lambda y)) + C_{4n} \lambda (2ch(\lambda y) + \lambda y \cdot sh(\lambda y))] \cos(\lambda x),$$

$$\sigma_y' = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^2 [C_{1n} ch(\lambda y) + C_{2n} sh(\lambda y) + C_{3n} y \cdot ch(\lambda y) + C_{4n} y \cdot sh(\lambda y)] \cos(\lambda x)$$

$$\tau_{xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda [C_{1n} \lambda \cdot sh(\lambda y) + C_{2n} \lambda \cdot ch(\lambda y) + C_{3n} (ch(\lambda y) + \lambda y \cdot sh(\lambda y)) + C_{4n} (sh(\lambda y) + \lambda y \cdot ch(\lambda y))] \sin(\lambda x).$$

Граничные условия на продольных кромках

$$t_1(y = \pm c) = \pm \tau_{xy}(y = \pm c) = 0$$

$$t_2(y = c) = \sigma_y'(y = c) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda x)$$

$$t_2(y = -c) = -\sigma_y'(y = -c) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(\lambda x).$$

Нахождение констант

$$C_{1n} = \frac{4q}{\lambda^3 l} \sin(\lambda \cdot a) \frac{sh(\lambda \cdot c) + \lambda \cdot c \cdot ch(\lambda \cdot c)}{sh(2 \cdot \lambda \cdot c) + 2 \cdot \lambda \cdot c};$$

$$C_{2n} = 0; C_{3n} = 0;$$

$$C_{4n} = -\frac{4q}{\lambda^3 l} \sin(\lambda \cdot a) \frac{sh(\lambda \cdot c)}{sh(2 \cdot \lambda \cdot c) + 2 \cdot \lambda \cdot c}.$$

Формулы для напряжений

$$\sigma_x = 4q \frac{a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} k_n [\lambda \cdot c \cdot ch(\lambda \cdot c) \cdot ch(\lambda \cdot y) - sh(\lambda \cdot c) \cdot (ch(\lambda \cdot y) + \lambda \cdot y \cdot sh(\lambda \cdot y))] \cos(\lambda \cdot x);$$

$$\sigma_y = -q \frac{a}{l} \{1 + 4 \sum k_n [\lambda \cdot c \cdot ch(\lambda \cdot c) \cdot ch(\lambda \cdot y) - sh(\lambda \cdot c) (\lambda \cdot y \cdot sh(\lambda \cdot y) - ch(\lambda \cdot y))] \cos(\lambda \cdot x)\};$$

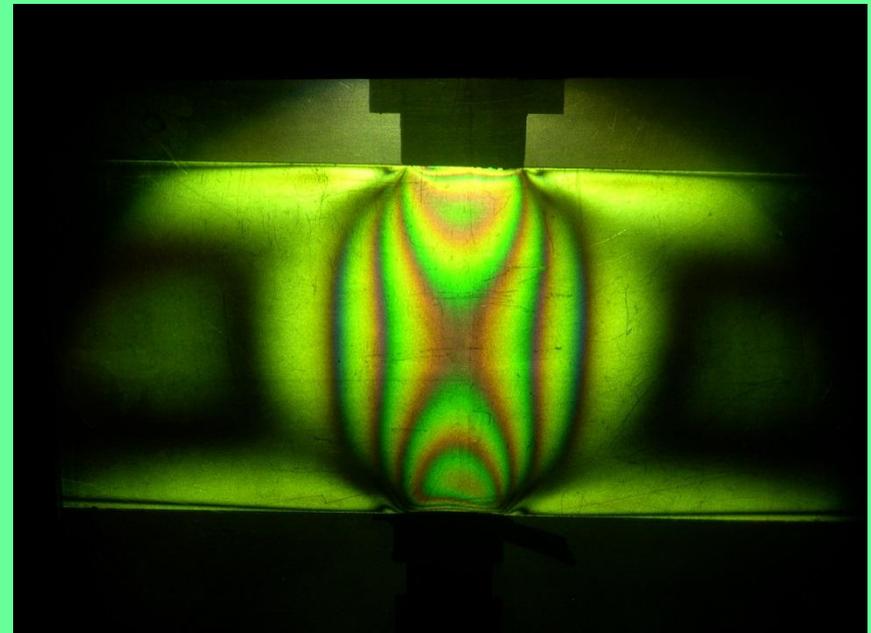
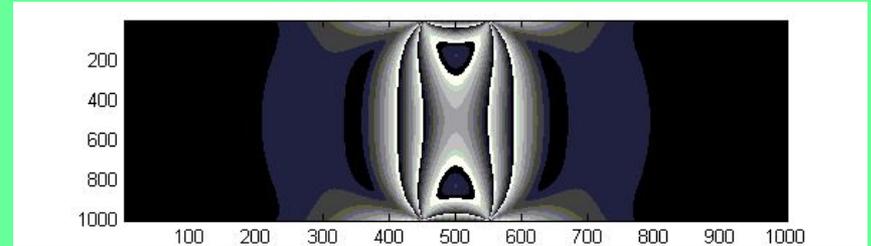
$$\tau_{xy} = 4q \frac{a}{l} \sum_{n=1}^{\infty} k_n (\lambda c \cdot ch(\lambda c) \cdot sh(\lambda y) - sh(\lambda c) \lambda y \cdot ch(\lambda y)) \sin(\lambda x)$$

$$k_n = \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda a (sh(2\lambda c) + 2\lambda c)}$$

Построение интерференционной картины

Для плоской задачи
разность главных
напряжений

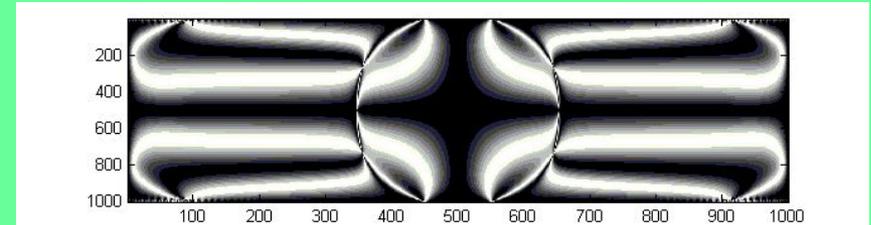
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$



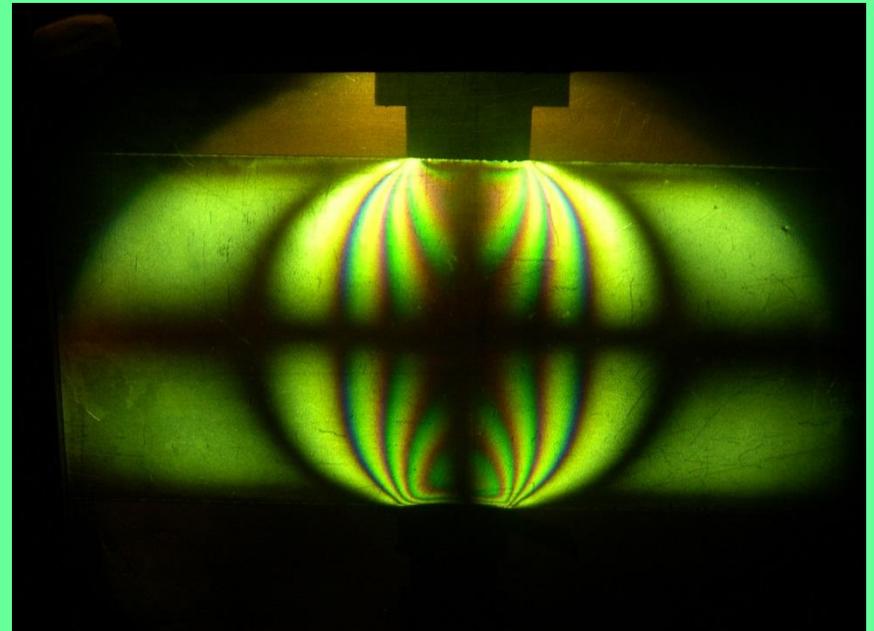
Построение картин изоклин

$$\alpha = 0$$

$$I = kE_0^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\hat{O} / 2)$$



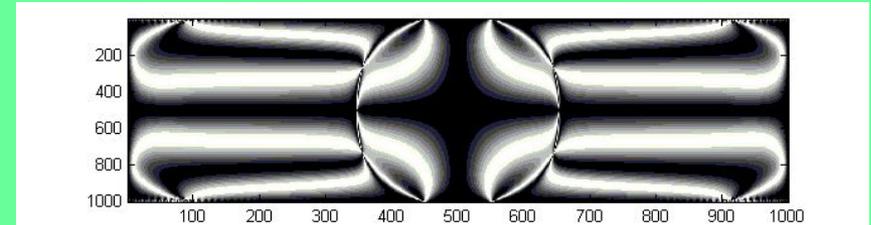
$$\alpha = \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



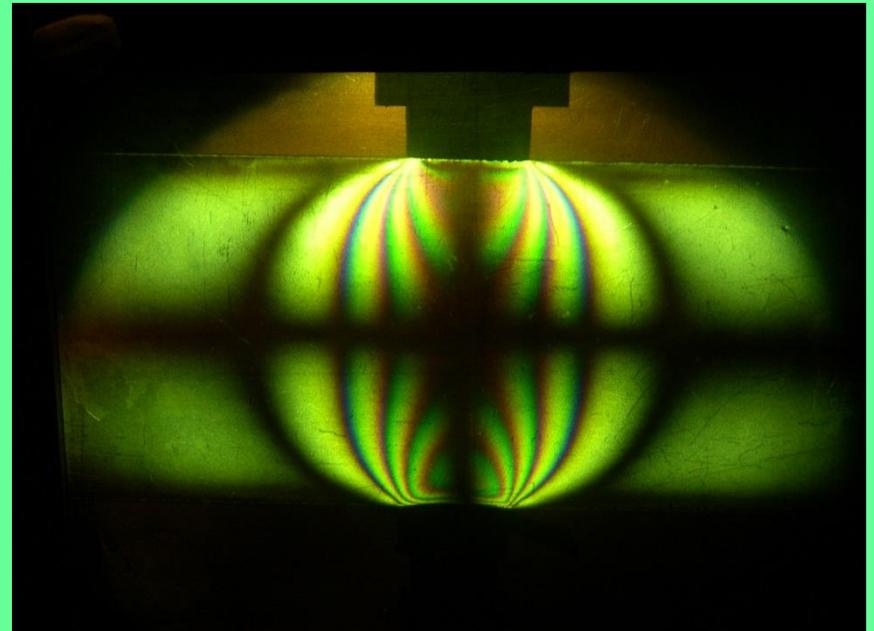
Построение картин изоклин

$$\alpha = 0$$

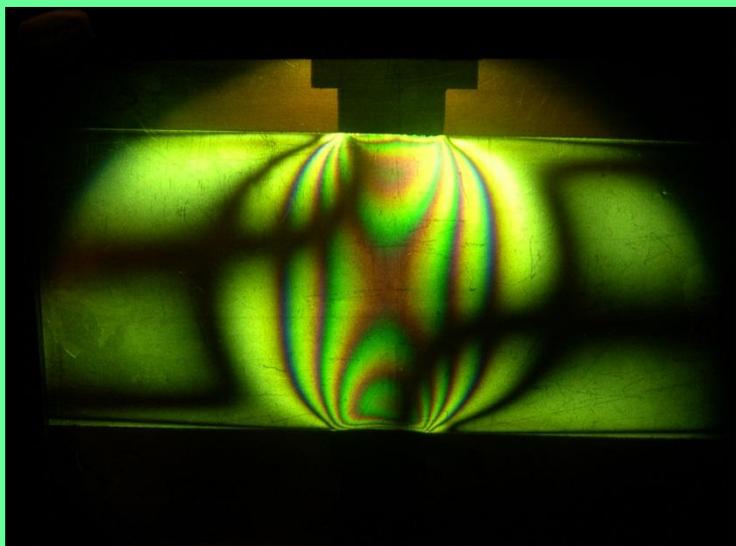
$$I = kE_0^2 \sin^2(2\alpha) \sin^2(\hat{O} / 2)$$



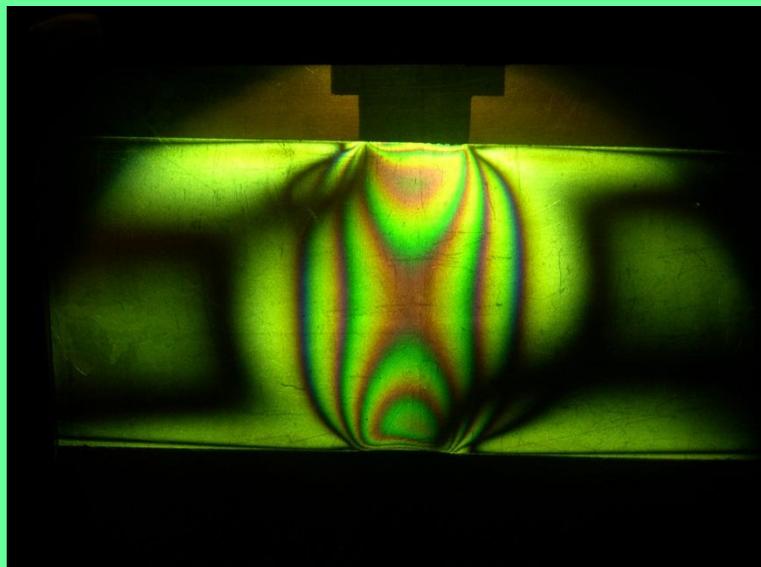
$$\alpha = \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$



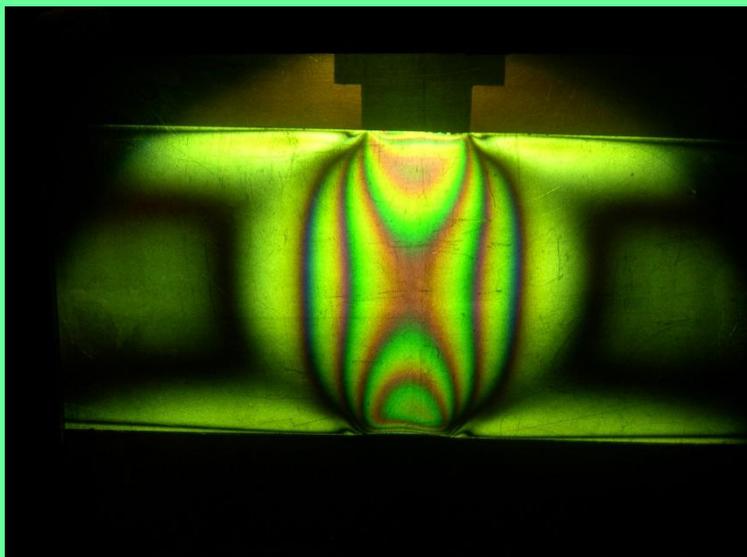
$$\alpha = 15^\circ$$



$$\alpha = 30^\circ$$



$$\alpha = 45^\circ$$



ВЫВОДЫ

Мы показали на простой модели, что аналитическое решение имеет очень большое сходство с практическим, поэтому метод фотоупругости можно применять для сложных моделей, где аналитическое решение требует очень больших подсчетов или не возможно сделать вообще.

При увеличении членов ряда аналитическое решение становится более точным, но увеличивается время выполнения счета, поэтому нельзя брать меньше 15 членов, так как будет большое расхождение с методом фотоупругости, но не стоит брать больше 25, так как изменение картины почти незаметно.