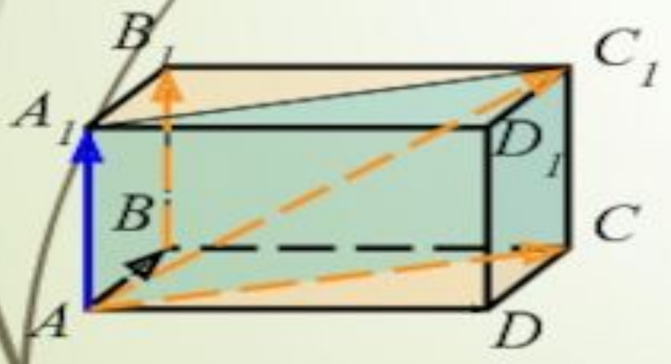
Компланарность векторов. Координаты вектора в пространстве.

Компланарные векторы – *векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

Пример:

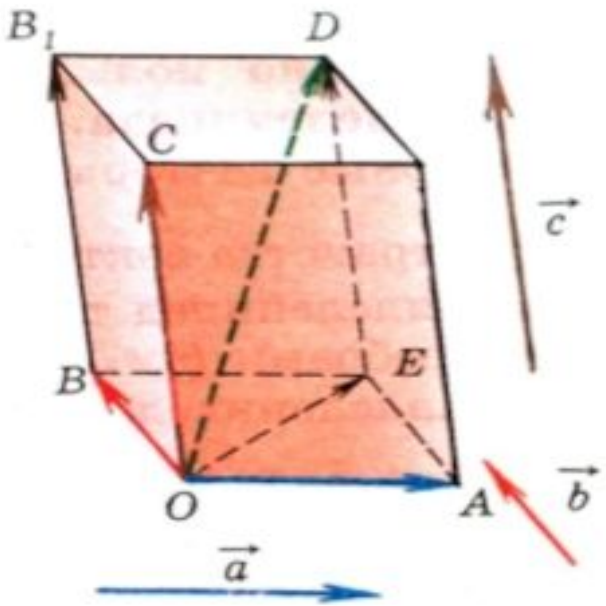


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ – *компланарны, т.к.*
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$, *а векторы* $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

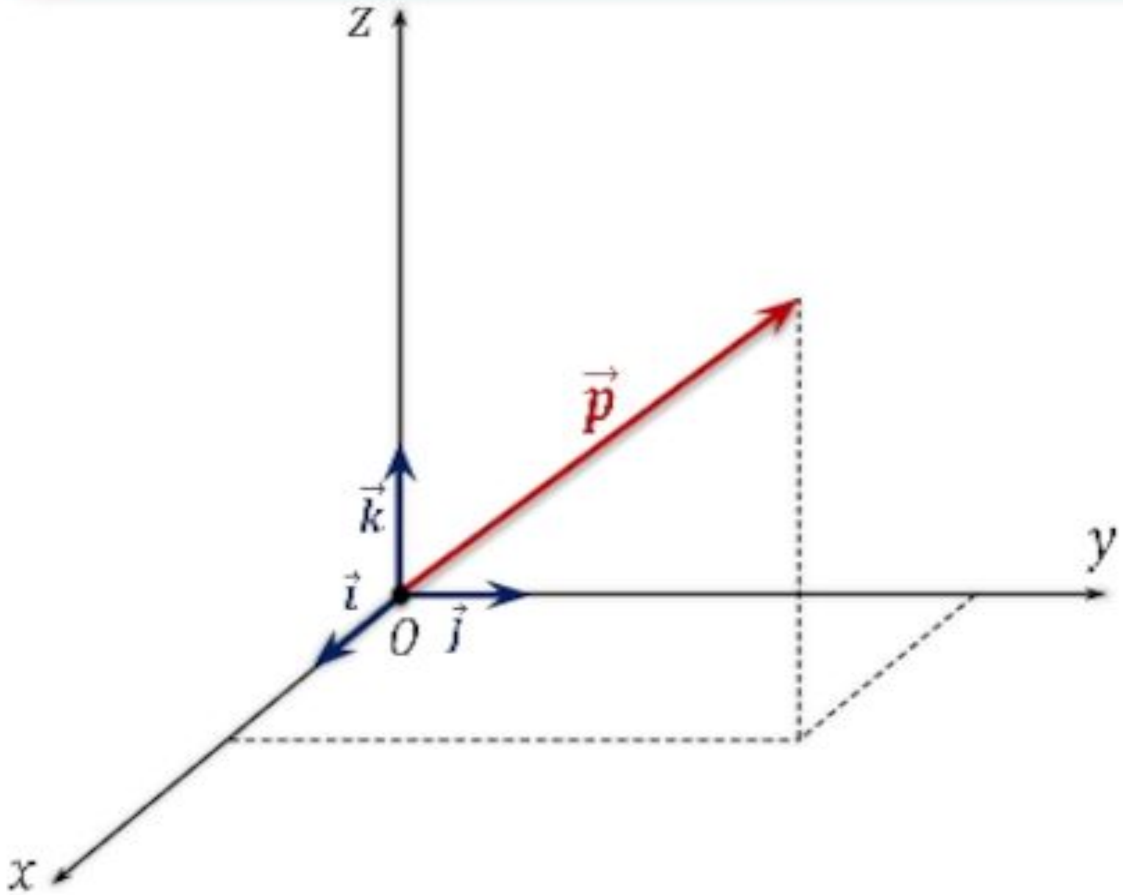
Правило параллелепипеда

- Пусть *a*, *b* и *c* – некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки *O* пространства векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ зим параллелепипед так, чтобы отрезки *OA*, *OB* и *OC* были его ребрами. Тогда диагональ *OD* этого параллелепипеда изображает сумму векторов *a*, *b* и *c*:

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$



Теорема
Любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – координатные векторы

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

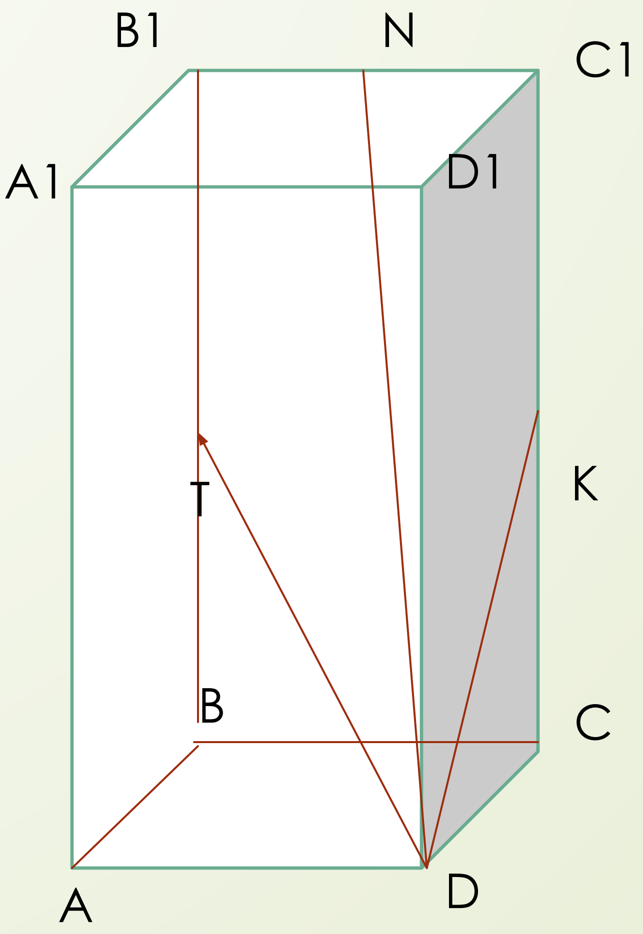
$x; y; z$
координаты вектора $\vec{p}$

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Если $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, где x, y и z — некоторые числа, то вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Числа x, y и z — коэффициенты разложения.

Теорема: Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Задача.



Даны векторы $BA = i$

BC=j

BB1=k

Точки T,N иK- середины ребер

Найдите координаты векторов DT,DK,DN.

Действия над векторами, заданными координатами.

Линейные операции над векторами в координатной форме

$$\overline{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}.$$

$$\boxed{\overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x,\ a_y + b_y,\ a_z + b_z\}}$$

$$\boxed{\overline{b} = \lambda \cdot \overline{a}, \quad \overline{b} = \{\lambda \cdot a_x,\ \lambda \cdot a_y, \lambda \cdot a_z\}}$$

Следствие.

Координаты коллинеарных векторов пропорциональны.

$$\boxed{\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = k}$$

Действия над векторами, заданными своими координатами (проекциями).

Пусть $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}$ или $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$

$\overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}$ или $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$

- Сумма (разность):

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z)$$

- Умножение вектора на скаляр:

$$\lambda \cdot \overline{a} = \lambda \cdot (a_x; a_y; a_z) = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$$

Укажите пары равных векторов

- *Дано*: А(2;7;-3); В(1;0;3); С(-3;-4;5); М(-2;3;-1)
  Определить: пары равных векторов
  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BM}$

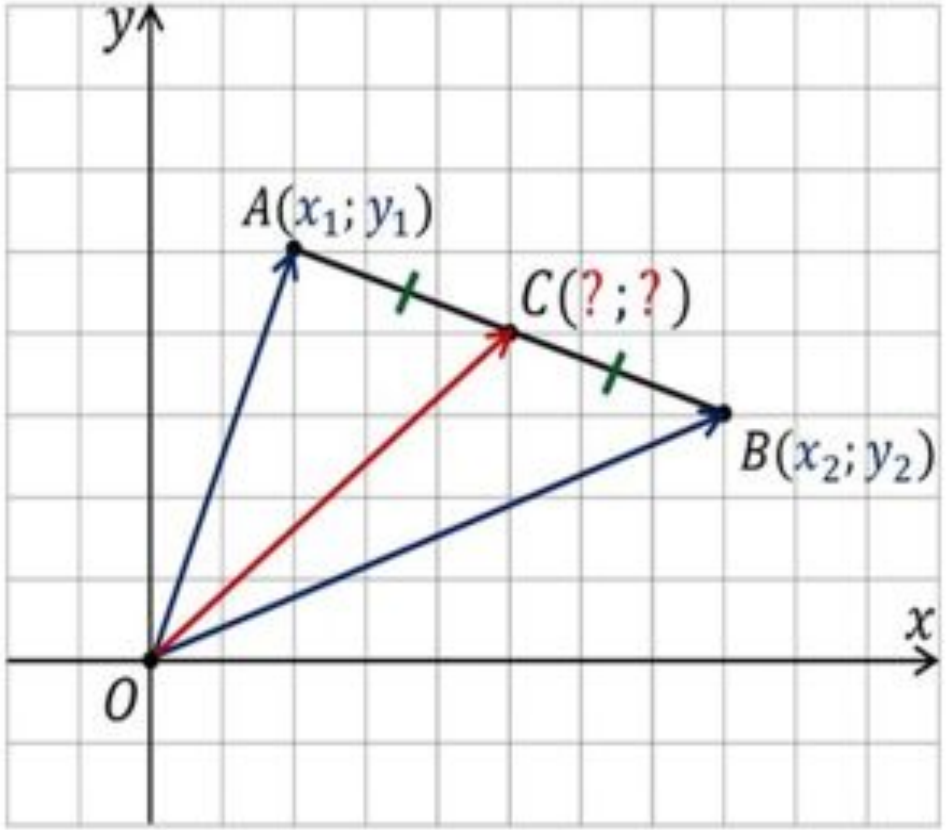
Решение:

$\overrightarrow{AB}(-1; -7; 6)$ $\overrightarrow{BC}(-4; -4; 2)$ $\overrightarrow{MC}(-1; -7; 6)$

$\overrightarrow{AM}(-4; -4; 2)$ $\overrightarrow{AC}(-5; -11; 8)$ $\overrightarrow{BM}(-3; 3; -4)$

Равны соответствующие координаты у векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BC}$, значит, они попарно равны

1. Определение координат середины отрезка



$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$$

$\overrightarrow{OA}$ – радиус-вектор точки A

$\overrightarrow{OB}$ – радиус-вектор точки B

$\overrightarrow{OA}\ \{x_1; y_1\}$

$\overrightarrow{OB}\ \{x_2; y_2\}$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\ \{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$

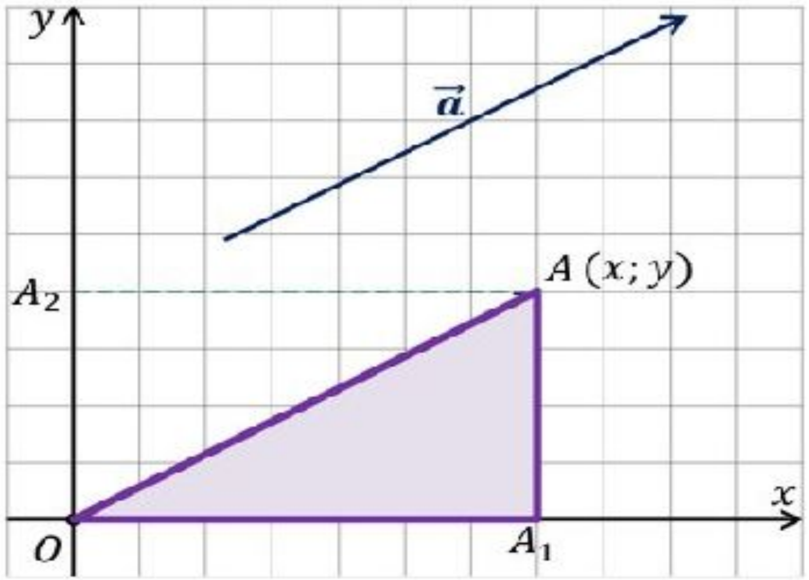
$\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\ \left\{\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right\}$

Каждая координата середины отрезка
равна полусумме соответствующих координат его концов.

$\overrightarrow{OC}\ C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Длина вектора

2. Вычисление длины вектора по его координатам



$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$A(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{OA}\{x;y\}$ $\quad\quad$ $\vec{a}\{x;y\}$

$OA_1 = |x|$

$A_1A = OA_2 = |y|$

$OA^2 = OA_1{}^2 + A_1A^2 \Rightarrow OA = \sqrt{OA_1{}^2 + A_1A^2}$

$OA = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a} \Rightarrow |\overrightarrow{OA}| = |\vec{a}| \Rightarrow OA = |\vec{a}|$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

$$\vec{a}\{x;y\} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Длина вектора

$$A_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Домашнее задание.

- 1. Треугольник АВС задан координатами вершин :
- А(9;3;-5)
- В(2;10;-5)
- С(2;3;2). Найдите периметр треугольника.
- 2. Атанасян Л.С., Геометрия, стр.111, № 430.