Тема 2 часть 2
Основные понятия и теоремы теории вероятностей

Пространство элементарных исходов. Достоверные, невозможные, случайные события. Алгебра событий. Сигма - алгебра событий. Аксиоматическое определение вероятностей. Вероятностное пространство: дискретное вероятностное пространство (примеры), непрерывное вероятностное пространство (примеры). Условные вероятности, теорема умножения вероятностей, независимость событий, взаимная независимость событий. Полная группа событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Повторные независимые испытания. Формула Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Разработчик: доцент кафедры математических методов и моделей в экономике, кандидат экономических наук Безбородникова Роза Минулловна

Непрерывное вероятностное пространство

Пусть $\Omega = \{\omega\}$ - k-мерное евклидово пространство R^k или k-мерная область в этом пространстве и U – σ-алгебра, порожденная измеримыми областями в Ω. Каждому ω из Ω поставим в соответствие числа $p(\omega)$, т.е. зададим на Ω числовую функцию, удовлетворяющую условиям:

1) неотрицательности: $p(\omega) \geq 0 \ \forall \omega \in \Omega$;

2) нормированности: $\int\limits_{\omega \in \Omega} p(\omega) d\omega = 1$.

Для любого события $A \subset U$ положим

$$P(A) = \int\limits_{\omega \in A} p(\omega) d\omega \,. \qquad (3)$$

Так определенная тройка (Ω, U, P) есть непрерывное вероятностное пространство.

Непрерывное вероятностное пространство

Рассмотрим частный случай непрерывного вероятностного пространства. Пусть Ω - ограниченная *k*-мерная область, т.е. область, имеющая длину (при k=1), площадь (при k=2), объем (при k=3) или гиперобъем (при k>3). Обозначим меру области Ω через $|\Omega|$, $0<|\Omega|<\infty$. Пусть все элементарные события равновозможны.

Положим $p(\omega)=\dfrac{1}{|\Omega|}$ $\forall\omega\in\Omega$. В этом случае согласно определению (3) получаем:

$$P(A)=\int\limits_{\omega\in A}p(\omega)d\omega=\int\limits_{\omega\in A}\frac{d\omega}{|\Omega|}=\frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{4}$$

т.е. вероятность события А равно отношению площади (длины, объема, гиперобъема) множества элементарных событий, благоприятствующих событию А, к площади (длине, объему, гиперобъему) всего пространства элементарных событий.

Рассмотренный частный случай дискретного вероятностного пространства называется **геометрическим вероятностным пространством**, а определение вероятности события (4) – **геометрическим определением вероятности события**.

Условные вероятности

Рассмотрим вероятностное пространство ([illegible], [illegible], [illegible]) и два события [illegible], [illegible] [illegible] [illegible]. При анализе случайных событий часто возникает вопрос о том, как влияет на возможность осуществления события A наступление события B. В теории вероятностей характеристикой связи событий A и B служит **условная вероятность** $P(A/B)$ события A, вычисленная при условии, что произошло событие B.

Найдем условную вероятность в двух простейших случаях.

1) Если A и B несовместные события ($A \cdot B = \varnothing$), то $P(A|B) = P(B|A) = 0$, так как по определению несовместных событий, если одно из них происходит, то второе произойти не может.

2) Если $B \subset A$, то $P(A|B) = 1$, так как событие A происходит всякий раз, когда происходит событие B.

Условные вероятности

Проиллюстрируем на примере классического вероятностного пространства (КВП), из каких соображений дается <u>*определение*</u> условной вероятности. Для КВП $\mathrm{P(A)} = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$, $\mathrm{P(B)} = \frac{|\mathrm{B}|}{|\Omega|}$ и $\mathrm{P(AB)} = \frac{|\mathrm{AB}|}{|\Omega|}$. Предположим, что произошло событие B, то есть реализовался элементарный исход, благоприятствующий B. Это означает, что множество возможных исходов Ω сократилось до множества B. А отсюда следует, что множество элементарных исходов, благоприятствующих A, сократилось до множества исходов AB. По определению вероятности в классическом вероятностном пространстве получаем:

$$P(A|B) = \frac{|AB|}{|B|} = \frac{|AB|/|\Omega|}{|B|/|\Omega|} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Полученное отношение и принимается за определение условной вероятности для произвольного вероятностного пространства (⊠, ⊠, ⊠) и $\mathrm{P(B)} \neq 0$.

Условные вероятности

Определение

Пусть (⊠, ⊠, ⊠) - произвольное вероятностное пространство. Если ⊠, ⊠ ⊠ ⊠ и $P(B) \neq 0$, то условная вероятность события A при условии, что произошло событие B, определяется формулой:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad (1)$$

Вероятность $P(A)$ в отличие от условной, называется безусловной вероятностью.

Аналогично, если $P(A) \neq 0$, определяется условная вероятность события B при условии A:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{AB})}{\mathrm{P}(\mathrm{A})}. \qquad (2)$$

Условные вероятности

Пример

Пусть в корзине 2 белых и 3 черных шара. Из неё последовательно вынимают 2 шара. Какова вероятность того, что второй шар оказался белым при условии, что первый шар был черным?

Пронумеруем шары: б б ч ч ч

1 2 3 4 5

$$\Omega = \{12,13,14,15,21,23,24,25,31,32,34,35,41,42,43,45,51,52,53,54\}$$

Число элементарных исходов $n = A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$.

Пусть событие A – вынутый первый шар черного цвета.

$$A = \{31,32,34,35,41,42,43,45,51,52,53,54\}$$

Число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, $m = 12$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \frac{12}{20}.$$

Пусть событие B – второй шар белого цвета.

$$B = \{21,31,41,51,12,32,42,52\}$$

Условные вероятности

Число элементарных исходов, благоприятствующих событию B, $k=8$.

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{k}{n}=\frac{8}{20}.$$

Пусть событие A произошло. Тогда событию B будут благоприятствовать следующие исходы из события A $\{31,41,51,32,42,52\}$, т.е. $r=6$ исходов из 12 возможных. Таким образом $P(B|A)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$. Воспользуемся формулой (2):

$$AB=\{31,41,51,32,42,52\},\ P(AB)=\frac{6}{20},\ P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{6/20}{12/20}=\frac{1}{2}.$$

Условные вероятности

Условная вероятность удовлетворяет аксиомам Колмогорова:

1) **неотрицательности**: $P(A \mid B) \geq 0$ по определению, так как и $P(B) > 0$ и $P(AB) \geq 0$;

2) **нормированности**: $P(\Omega \mid B) = \dfrac{P(\Omega B)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$;

3) **аддитивности**: если $A_1, A_2, \dots, A_n \in U$, где n может быть равна ∞, $A_i \cdot A_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, то

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i \mid B) = \frac{P\left(\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \cdot B\right)}{P(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B).$$

Все свойства безусловной вероятности, полученные как следствия из аксиом Колмогорова, справедливы и для условной вероятности.

Теорема умножения вероятностей

Из определения условной вероятности (1) и (2) следует, что

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B\,|\,A) = P(B)\cdot P(A\,|\,B)\,, \qquad (3)$$

т.е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Равенство (3) называют **правилом или теоремой умножения вероятностей**. Это правило можно обобщить на случай n событий:

$$P(A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n) = \left| A_1A_2\ldots A_{n-1} \overset{обозн.}{\equiv} B \right| = P(BA_n) = P(B)\cdot P(A_n\,|\,B) = P(A_1\ldots A_{n-1})\cdot$$
$$\cdot P(A_n\,|\,A_1\ldots A_{n-1}) = P(A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot P(A_{n-1}\,|\,A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot P(A_n\,|\,A_1\ldots A_{n-1}) =$$
$$= P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_{n-1}\,|\,A_1A_2\ldots A_{n-2})\cdot P(A_n\,|\,A_1\ldots A_{n-1})$$

Для трех событий получаем: $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1A_2)$.

Теорема умножения вероятностей

Пример

В коробке 4 белых, 3 синих и 2 черных шара. Наудачу последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность того, что 1-ый шар будет белым, 2-ой – синим, 3-ий – черным?

Введем следующие события:

A_1 - первым вынули белый шар;

A_2 - вторым вынули синий шар;

A_3 - третьим вынули черный шар.

Тогда интересующее нас событие A представляется в виде: $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. По правилу умножения вероятностей $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$.

Эту задачу можно было решить так:

$$P(A) = \frac{1}{P_3} \cdot \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_9^3} = \frac{1}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot 3! = \frac{1}{21}.$$

Независимость событий.
Взаимная независимость событий

Рассмотрим произвольное вероятностное пространство (⊠, ⊠, ⊠) и два события ⊠, ⊠ ⊠ ⊠.

<u>Определение</u>

События A и B называются **независимыми**, если выполнено равенство:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \tag{4}$$

то есть вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей каждого из них.

В противном случае события называют зависимыми, и вероятность их произведения вычисляют по формуле (3).

Независимость событий. Взаимная независимость событий

Определение

Событие A **не зависит** от B ($P(B)>0$), если

$$P(A\,|\,B)=P(A) \tag{5}$$

и событие B не зависит от A ($P(A)>0$), если

$$P(B\,|\,A)=P(B) \tag{6}$$

Теорема

Если $\mathrm{P(A)}>0$ и $\mathrm{P(B)}>0$, то свойства (4), (5), (6) эквивалентны.

Доказательство

Эквивалентность означает, что если верно любое из указанных равенство, то верны и остальные два.

Пусть верно (4), тогда $P(A\,|\,B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$, т.е. верно (5). Обратно, пусть верно (5), тогда $P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)=P(A)P(B)$. Следовательно, (4) и (5) эквивалентны. Аналогично устанавливается эквивалентность (4) и (6). Тогда (5) и (6) эквивалентны между собой, поскольку они порознь эквивалентны третьему.

Независимость событий.
Взаимная независимость событий

Приведем примеры зависимых и независимых событий.

1) Если А и В – несовместны и $0 < \mathrm{P(A)} < 1$, $0 < \mathrm{P(B)} < 1$, то они зависимы. Действительно, предположим противное, получим, что $P(AB) = P(A) \cdot P(B) \neq 0$, следовательно, $AB \neq \varnothing$, т.е. A и B совместны. Противоречие! Замечание: зависимые события могут быть как совместны, так и несовместны, а совместные могут быть как зависимы, так и независимы.

2) Если событие A влечет событие B и $0 < \mathrm{P(A)} < 1$, $0 < \mathrm{P(B)} < 1$, то они зависимы, т.е. $P(AB) = P(A) \neq P(A)P(B)$.

3) Невозможное и достоверное события не зависят ни от себя, ни от каких-либо других событий. Действительно, пусть А – произвольное событие, тогда $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \cdot 1 = P(A)P(\Omega)$, $P(A \cap 0) = P(0) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A)P(0)$.

Независимость событий. Взаимная независимость событий

Теорема

Если события A и B – независимы, то независимы $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Доказательство

Например, проверим независимость $\overline{A}$ и B:

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \setminus \mathrm{AB}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{AB}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) - \mathrm{P}(\mathrm{A}) \cdot \mathrm{P}(\mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{B}) \cdot (1 - \mathrm{P}(\mathrm{A})) = \mathrm{P}(\mathrm{B})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}).$$

Теорема

Если $0 < P(B) < 1$, то события A и B независимы тогда и только тогда, когда $P(A \mid B) = P(A \mid \overline{B})$.

Замечание: на практике о независимости тех или иных событий часто судят исходя из интуитивных соображений и анализа условий опыта, считая независимыми события, «между которыми нет причинно-следственных связей».

Независимость событий.
Взаимная независимость событий

<u>Определение</u>

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **взаимно независимыми** или независимыми в совокупности, если для любых k из них ($2 \le k \le n$) выполняется соотношение

$$P(A_{i1} \cdot A_{i2} \cdot ... \cdot A_{ik}) = P(A_{i1}) \cdot P(A_{i2}) \cdot ... \cdot P(A_{ik}) . \qquad (7)$$

Если равенство (7) выполняется только при k=2, то события называются **попарно независимыми**.

Из попарной независимости не следует взаимная. Также следует отметить, что из условия $P(A_1A_2...A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot ... \cdot P(A_n)$ не следует попарная, а стало быть и взаимная независимость событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Независимость событий.
Взаимная независимость событий

Рассмотрим несколько свойств взаимно независимых событий.

Свойство 1. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ взаимно независимы, то любые k из них также взаимно независимы $1 \le k \le n$.

Свойство 2. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ взаимно независимы, то $\forall k,\ 1 \le k < n$ два события $A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_k$ и $A_{k+1} \cdot A_{k+2} \cdot ... \cdot A_n$ независимы.

Свойство 3. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ взаимно независимы, то любые n-1 из них и событие, противоположное оставшемуся, взаимно независимы, то есть события A_1, $A_1, ..., A_{i-1}, \overline{A_i}, A_{i+1}, ..., A_n$ - взаимно независимы.

Свойство 4. Рассмотрим 2^n множеств вида $\left\{A_1^{\sigma_1}, A_2^{\sigma_2}, ..., A_n^{\sigma_n}\right\}$, где $\sigma_1 \in \{0,1\} \forall i$. Тогда, если одно из этих множеств состоит из взаимно независимых событий, то и остальные 2^n-1 множеств также состоят из взаимно независимых событий.

Свойство 5. Если взаимно независимые события $A_1, A_2, ..., A_n$ разбить на k непересекающихся групп и из событий каждой группы породить новое событие путем применения к нему произвольного набора операций над событиями, то вновь образованные события $B_1, B_2, ..., B_k$ будут взаимно независимы.

Вероятность суммы событий

Согласно аксиоме аддитивности, если A, B [illegible] являются несовместными событиями, то $P(A+B)=P(A)+P(B)$. Вероятность суммы двух совместных событий определяется согласно доказанному пятому свойству вероятности: если [illegible] и [illegible] – произвольные случайные события, то [illegible] + [illegible] и $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Эти формулы можно получить для любого числа событий.

<u>Замечание</u>

Проще найти вероятность суммы нескольких совместных событий $P(A)=P(A_1+A_2+\ldots+A_n)$, используя четвертое доказанное свойство вероятности $P(A)+P(\overline{A})=1$, где $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\ldots\cdot\overline{A}_n$. Тогда $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Вероятность суммы событий

<u>Пример</u>

Бросаются две игральные кости. Какова вероятность появления хотя бы одной шестерки?

Введем в рассмотрение следующие события:

A – появление шестерки на первой кости;

B – появление шестерки на второй кости.

Тогда $A+B$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одной шестерки при бросании костей. События А и В совместные. Тогда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$.

Решим иначе: $P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\overline{A}\cdot\overline{B})=1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Одним из следствий совместного применения теорем сложения и умножения вероятностей, а также одно из основных приложений понятия условной вероятности являются формула полной вероятности и формула Байеса.

Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ – полная группа событий (разбиение Ω), то есть $H_i \cdot H_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j$ и $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Известны априорные (доопытные) вероятности $P(H_i) > 0,\; i = \overline{1, n}$.

Пусть событие A может произойти совместно только с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, причем известны условные вероятности интересующего события A: $P(A \mid H_i) > 0$, $i = \overline{1, n}$. Тогда справедлива **формула полной вероятности**

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i). \qquad (8)$$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Доказательство

Так как события H_i и H_j несовместны $\forall i \neq j$, то несовместны также и события AH_i и AH_j $\forall i \neq j$. Так как $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$, то $A = A \cdot \Omega = A\left(\sum_{i=1}^{n} H_i\right) = \sum_{i=1}^{n} AH_i$.

Тогда по формулам сложения и умножения вероятностей получаем:

$$P(A) = P\left(\sum_{i=1}^{n} AH_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(AH_i) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i).$$

События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называют гипотезами, они исчерпывают все возможные предположения относительно исходов первого этапа опыта. Событие A – один из возможных исходов второго этапа.

Формула полной вероятности и формула Байеса

Пример

Три завода производят однотипные изделия, причем первый завод производит 20% всей продукции, второй – 30%, третий – 50%. Доля брака в продукции этих заводов составляет 5%, 2% и 1% соответственно. Какова вероятность того, что наудачу взятое изделие из продукции всех трех заводов окажется бракованным (событие A)?

Пусть H_i={выбранное изделие изготовлено на i-ом заводе}, i=1, 2, 3. Очевидно, H_1, H_2, H_3 образуют разбиение Ω, причем $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}5$, $P(A\,|\,H_1)=0{,}05$, $P(A\,|\,H_2)=0{,}02$, $P(A\,|\,H_3)=0{,}01$. Тогда по формуле полной вероятности получаем:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A\,|\,H_i)=0{,}2\cdot 0{,}05+0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}5\cdot 0{,}01=0{,}021.$$

Формула полной вероятности и формула Байеса

Пусть снова событию А сопутствует одна из гипотез $H_1, H_2, ..., H_n$, $H_i \cdot H_j = \varnothing$ $\forall i \neq j$, $\sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. Предположим, что до опыта известны априорные вероятности гипотез $P(H_i)$, $i = \overline{1, n}$, а после его проведения стала известна дополнительная информации о том, что произошло событие A. Необходимо вычислить апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез $P(H_i \mid A)$. Это позволит ответить на вопрос, какая гипотеза сопутствовала появлению события А? Формулы вычисления этих вероятностей называются **формулами Байеса** (формулы переоценки гипотез):

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}, \qquad (9)$$

где $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)$.

Формула полной вероятности и формула Байеса

<u>Доказательство</u>

Применив формулы условной вероятности и умножения вероятностей, получаем:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i \cdot A)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

<u>Пример</u>

Продолжая предыдущий пример, предположим, что выбранное изделие оказалось бракованным. Определить вероятности того, что оно произведено на первом, втором, третьем заводе.

По формуле Байеса получаем:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}021} = 0{,}476;$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}02}{0{,}021} = 0{,}286;$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}021} = 0{,}238.$$