Новгородский Государственный Университет

имени Ярослава Мудрого

Институт Электронных и Информационных Систем
Кафедра Проектирования и Технологии Радиоаппаратуры

Техническая электродинамика

Лекция №8

«Волны в средах»

Часть 1

Плоские волны в однородной изотропной среде без потерь

Волновое уравнение гармонического э/м поля для $\dot{\bar{E}}_m$.

Будем рассматривать свободное (существующее без источников) гармонически колеблющееся электромагнитное поле, которое изменяется в пространстве только вдоль направления оси Z выбранной декартовой системы координат. В рассматриваемом случае комплексные амплитуды $\dot{\bar{E}}_m$ и $\dot{\bar{H}}_m$ не зависят от *x* и *y*, поэтому волновое уравнение, например, в случае вещественного *k* для $\dot{\bar{E}}_m$ принимает вид:

$$\frac{d^2 \dot{\bar{E}}_m}{dz^2} + k^2 \dot{\bar{E}}_m = 0,$$

где $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$

Решение этого уравнения имеет вид: $\dot{\bar{E}}_m = \dot{\bar{A}} e^{-ikz} + \dot{\bar{B}} e^{ikz}$,

где $\dot{\bar{A}}$ и $\dot{\bar{B}}$ - произвольные векторные константы, лежащие в плоскости (x, y).

Волновое уравнение гармонического э/м поля. $\dot{\overline{E}}_m$.

Пусть $\dot{\overline{A}} = \overline{A} e^{i\varphi}$, $\dot{\overline{B}} = \overline{B} e^{i\psi}$.

Умножив комплексную амплитуду на $e^{i\omega t}$ и отделив вещественную часть получим наложение двух гармонических волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\overline{E}(z,t) = \overline{A}\cos(\omega t - kz + \varphi) + \overline{B}\cos(\omega t + kz + \psi)$$

Будем рассматривать волну, движущуюся вдоль оси Z, возникающую как частное решение при $\overline{B} = 0$, т.е. $\dot{\overline{E}}_m = \dot{\overline{A}} e^{ikz}$.

Ориентация $\overline{E}_m$ относительно осей X и У зависит от ориентации вибратора, создающего поле. Для простоты предположим, что

$$\dot{\overline{A}} = \dot{A}\,\overline{x}_0\,,$$

где $\overline{x}_0$ - единичный вектор, направленный вдоль оси X.

Тогда $\dot{\overline{E}}_m = \overline{x}_0 \dot{A} e^{-ikz}$.

Волновое уравнение гармонического э/м поля. $\dot{\bar{H}}_m$.

Для нахождения $\dot{\bar{H}}_m$ запишем уравнения Максвелла для вещественных ε и μ:

$$rot\,\dot{\bar{H}} = i\omega\varepsilon\varepsilon_0\,\dot{\bar{E}}, \quad rot\,\dot{\bar{E}} = -i\omega\mu\mu_0\,\dot{\bar{H}}.$$

в координатной форме с учетом обращения в нуль производных от компонент поля по *x* и по *y*:

$$\frac{d\dot{H}_{my}}{dz} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\dot{E}_{mx}; \qquad \frac{d\dot{E}_{mx}}{dz} = -i\omega\mu_0\mu\,\dot{H}_{my};$$

$$\frac{d\dot{H}_{mx}}{dz} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon\,\dot{E}_{my}; \qquad \frac{d\dot{E}_{my}}{dz} = i\omega\mu_0\mu\,\dot{H}_{mx};$$

$$\dot{H}_{mz} = 0; \qquad \dot{E}_{mz} = 0;$$

Волновое уравнение гармонического э/м поля для $\dot{\bar{H}}_m$.

Очевидно, что электромагнитное поле не имеет продольных компонент. Учитывая, что электрическое поле направлено вдоль X, получим

$$\dot{\bar{H}}_m = \bar{y}_0 \frac{\dot{A} e^{-ikz}}{z_c}$$

где волновое сопротивление z_c определяется формулой

$$z_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} = z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}},$$

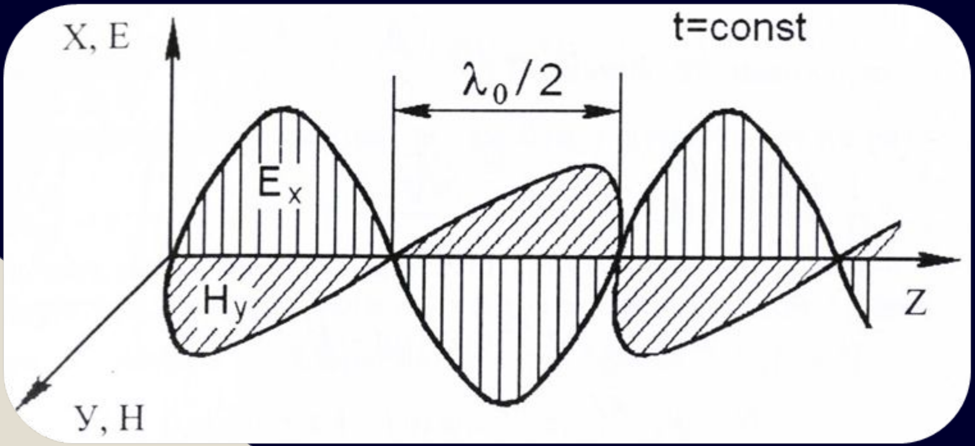
$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$ [Ом] – волновое сопротивление вакуума.

Распределение составляющих поля в плоской однородной волне

Переходя от комплексной формы записи к векторной, находим

$$\overline{E}=\overline{x}_0 A\cos(\omega t-kz+\varphi);$$

$$\overline{H}=\overline{y}_0 \frac{A}{z_c}\cos(\omega t-kz+\varphi).$$



Вычислим энергетические характеристики волны. Плотности электрической и магнитной энергии равны

$$\omega_э=\omega_m=\frac{\omega_\Sigma}{2}=\varepsilon_0\varepsilon\frac{A^2}{2}\cos^2(\omega t-kz+\varphi).$$

Найдём вектор Пойнтинга:

$$\overline{\Pi}=\left[\overline{E},\overline{H}\right]=\overline{z}_0\frac{\omega_\Sigma c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Фазовая скорость и длина плоской однородной волны

$$\overline{E} = \overline{x}_0 A \cos(\omega\ t - k\ z + \varphi);$$

Волновой фронт волны:

$$\overline{H} = \overline{y}_0 \frac{A}{z_c} \cos(\omega\ t - k\ z + \varphi).$$

как плоскость постоянных фаз, не меняющихся при движении, должен удовлетворять уравнению $\omega\ t - k\ z = const$. Дифференцируя это выражение по времени, получим выражение для фазовой скорости

$$V_\phi = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

что совпадает со скоростью распространения энергии.

Получим выражение для длины волны – расстояния, пройденного волной за период колебания Т.

$$\lambda = V_\phi T = V_\phi \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{k}.$$

Часть 2

Волны в поглощающих средах

Затухающая волна. Комплексное волновое число $\dot{k}$.

Пусть теперь волновое число k – величина комплексная ввиду комплексности проницаемостей μ и ε.

$$\dot{k} = k' - ik'' = |k|\, e^{-i(\Delta+\Delta^M)/2}$$

где $tg\Delta = \varepsilon''/\varepsilon'$; $\quad tg\Delta^M = \dfrac{\mu''}{\mu'}$; $\quad \left|\dot{k}\right| = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\left|\dot{\varepsilon}\right|\left|\dot{\mu}\right|}$.

Переходя от комплексных амплитуд

$$\dot{\overline{E}}_m = \overline{x}_0 \dot{A} e^{-i\dot{k}z}, \qquad \dot{\overline{H}}_m = \overline{y}_0 \frac{\dot{A} e^{-i\dot{k}z}}{z_c}$$

к векторам поля получим

$$\overline{E} = \overline{x}_0 A e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi);$$

$$\overline{H} = \overline{y}_0 \frac{A}{\left|\dot{z}_c\right|} e^{-k''z} \cos(\omega t - k'z + \varphi - \varphi_z),$$

где φ_Z - аргумент волнового сопротивления z_c.

Комплексное волновое число $\dot{k}$

Мы получили затухающую волну, у которой амплитуды поля уменьшаются с расстоянием по закону $e^{-k''z}$, причем $\overline{E}$ и $\overline{H}$ уже не синфазны. Будем считать, что магнитные потери отсутствуют, т.е. $\mu''=0$

Тогда

$$k'=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+tg^2\Delta}\right)};$$

$$k''=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+tg^2\Delta}\right)}.$$

Диэлектрик с tgΔ<<1.

Рассмотрим диэлектрик с $tg\Delta << 1$, тогда

$$\dot{k} \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon' \mu'}\left(1 - i\frac{tg\Delta}{2}\right),$$

т.е. $k' \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon' \mu}, \qquad k'' \approx k'\frac{tg\Delta}{2}.$

В случае затухающей волны $V_\phi = \omega / k'$. Т.е. k’ играет такую же роль, как и вещественное волновое число k.

Фазовая скорость и длина волны в диэлектрике, которые зависят только от k’, меняются незначительно при переходе от идеального диэлектрика к реальному. Волновое сопротивление имеет малую мнимую часть

$$z_c \approx z_0\sqrt{\frac{\mu'}{\varepsilon'}}\left(1 + i\frac{tg\Delta}{2}\right).$$

Проводник с tgΔ>>1.

Рассмотрим проводник с $tg\Delta >> 1$, тогда

- $k \approx \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'(1-itg\Delta)} \approx (1-i)\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{tg\Delta}{2}},$

Т.е. $$k' = k'' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon'\mu'}\sqrt{\frac{tg\Delta}{2}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu\sigma}{2}},$$

Величина k’ нелинейно зависит от частоты, следовательно, свойства волны будут различными на разных частотах:

$$V_\phi = \frac{\omega}{k'} = 2\sqrt{\frac{\pi f}{\mu_0\mu\sigma}}, \qquad \lambda = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{f\mu_0\mu\sigma}},$$

$$z_c = (1+i)\sqrt{\frac{\mu_0\mu\omega}{2\sigma}}.$$

Проводник с tgΔ>>1.

Пусть амплитуда напряженности электрического поля в точке с координатой **z** равна **E_m(z)**, а амплитуда в точке с координатой ***z+l*** равна *$E_m(z+l)$*.

Отношение $\dfrac{E_m(z)}{E_m(z+l)} = e^{k''l}$ показывает во сколько раз уменьшилась амплитуда волны при прохождении расстояния ***l***. Расстояние ***δ***, при прохождении которого поле ослабевает в ***е*** раз, называют *глубиной проникновения поля в среду* :

$$\delta_c = \frac{1}{k''} = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \mu \sigma}}.$$

Глубина проникновения зависит от частоты: чем больше частота, тем меньше глубина проникновения δ_c.

Этот эффект называется поверхностным, или скин-эффектом.

Волны в средах

Спасибо за внимание