Лекция 3

Уравнение сохранения количества движения. Уравнения движения сплошной среды. Тензор напряжений.

Движение и деформации сплошной среды происходят под действием сил, являющихся векторными величинами. В механике сплошной среды принято различать поверхностные силы, массовые или объемные силы, силы внутренние и внешние.

Поверхностные силы и характеризующий их вектор напряжения $\mathbf{p}_n$ рассматривались в предыдущей лекции. Поэтому обратимся к понятию массовых или объемных сил.

Массовые или объемные силы являются распределенными силами, которые действуют в каждой точке объема среды τ. Удобной характеристикой массовых или объемных сил является их плотность, которую можно ввести следующим образом.

Выделим малую частицу среды с массой Δm и обозначим через $\Delta\mathcal{F}$ главный вектор массовых сил, действующих на данную частицу. Определим затем плотность массовых сил $\mathbf{F}$ как

$$\mathbf{F} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta\mathcal{F}}{\Delta m}.$$

Ясно, что величина $\mathbf{F}$ есть сила, действующая на единицу массы вещества. Соответственно плотностью объемной силы называется величина $\rho\mathbf{F}$, равная силе, которая действует на единичный объем среды.

Хорошо известным примером массовых сил служит сила тяжести, плотность которой равна ускорению свободного падения.

Воспользуемся теперь введенной классификацией сил, чтобы вывести уравнения движения сплошной среды.

Определим количество движения подвижного объема τ равенством

$$\mathbf{Q} = \int\limits_{\tau} \rho \mathbf{v} \, d\tau.$$

Обобщим затем известную теорему об изменении количества движения системы материальных точек, которая выводится на основании законов Ньютона. Примем, что изменение количества движения $d\mathbf{Q}$ за время dt равно импульсу внешних сил, действующих на частицы выделенного объема τ с поверхностью Σ, то есть

$$d\mathbf{Q} = \left(\int\limits_{\tau} \rho \mathbf{F} \, d\tau + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\Sigma \right) \, dt$$

или

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \int\limits_{\tau} \rho \mathbf{F} \, d\tau + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\Sigma.$$

Воспользовавшись выражением для $\mathbf{Q}$, формулой дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему , уравнением неразрывности и определением индивидуальной производной (см. лекции №1-2), выводим уравнение движения сплошной среды в интегральной форме

$$\int\limits_{\tau} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\, d\tau = \int\limits_{\tau} \rho \mathbf{F}\, d\tau + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{p}_n d\Sigma. \qquad 1)$$

Применим уравнение (1) к малому индивидуальному объему в виде тетраэдра, изображенному на рис. 7. Три грани тетраэдра параллельны координатным плоскостям, а четвертая характеризуется нормалью $\mathbf{n}$. Напряжения на гранях обозначим соответственно через $\mathbf{p}_{-x}$, $\mathbf{p}_{-y}$, $\mathbf{p}_{-z}$, $\mathbf{p}_n$.

1

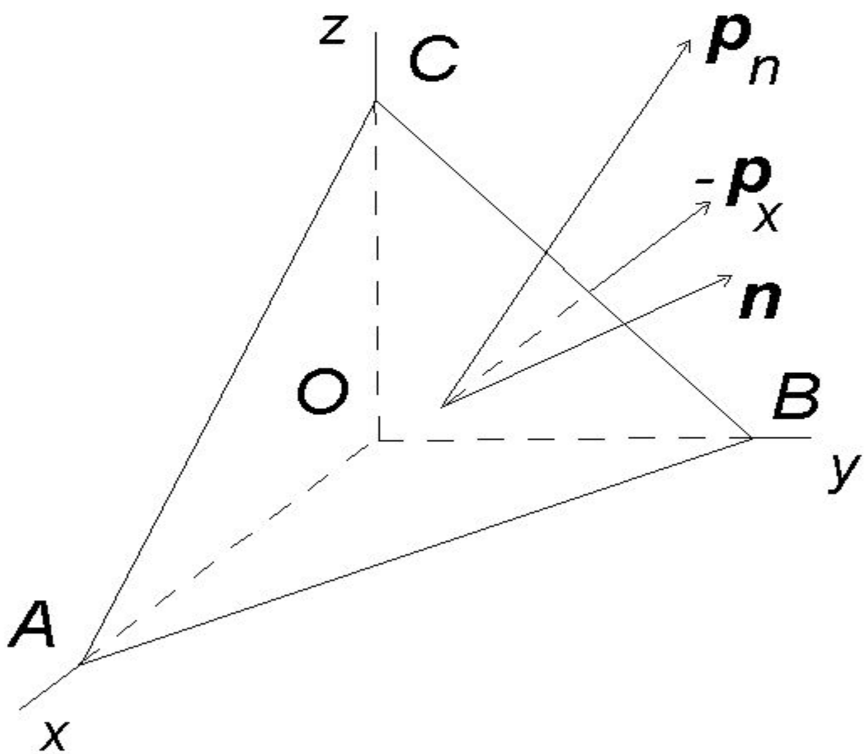

Рис. 7. Малый тетраэдр, рассматриваемый при выводе формулы Коши.

Пусть S - площадь $\Delta\, ABC$ и h - высота, опущенная на грань ABC из вершины O. Тогда

$$S_{AOB} = S\cos(\mathbf{n}, z),\; S_{AOC} = S\cos(\mathbf{n}, y),\; S_{BOC} = S\cos(\mathbf{n}, x).$$

Из (1) находим

$$\frac{1}{3}hS\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{3}hS\rho\mathbf{F} + \mathbf{p}_n S - \mathbf{p}_x S\cos(\mathbf{n}, x) - \\ - \mathbf{p}_y S\cos(\mathbf{n}, y) - \mathbf{p}_z S\cos(\mathbf{n}, z).$$

Если ρ, $d\mathbf{v}/dt$ и $\mathbf{F}$ конечны, то при $h \to 0$ из последнего соотношения следует формула Коши

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, z). \qquad 2)$$

Из (2) видно, что в силу произвольного выбора вектора **n** и в соответствии с определением тензора , совокупность векторов $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ образует тензор П, который называется тензором напряжений. Для компонент П примем обычные обозначения $p_{xx}, p_{xy}, ..., p_{zy}, p_{zz}$. При этом первый индекс относится к вектору напряжения на площадке, перпендикулярной соответствующей координатной оси, а вторым индексом обозначены проекции этого вектора на оси x, y, z.

С учетом (2) уравнение (1) вследствие произвольности τ может быть записано в дифференциальной форме

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho\mathbf{F} + div\,\Pi, \qquad \text{3)}$$

$$div\,\Pi = \frac{\partial\mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial\mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial\mathbf{p}_z}{\partial z}$$

(в (1) при переходе от интеграла по поверхности Σ к интегралу по объему τ использована формула Гаусса-Остроградского

Уравнение сохранения момента количества движения. Симметрия тензора напряжений.

По аналогии с механикой системы материальных точек введем определение момента количества движения **K** подвижного объема сплошной среды τ относительно некоторой точки O (принимаемой ниже для определенности за начало координат), полагая

$$\mathbf{K} = \int\limits_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho d\tau. \qquad 4)$$

Отметим, что такое выражение для $\mathbf{K}$ не учитывает возможность присутствия в сплошной среде собственных моментов количества движения, обусловленных атомным строением вещества (например, в рамках элементарных представлений о структуре атома собственным моментом количества движения обладает система, состоящая из ядра и вращающегося вокруг него электрона). Однако далее мы будем пользоваться лишь классическим определением (5). Кроме того, исключим из рассмотрения распределенные массовые и поверхностные пары сил, воздействие которых на среду также связано с микроскопическими явлениями.

Постулируем теперь, что скорость изменения момента количества движения подвижного объема сплошной среды равна сумме моментов внешних массовых и поверхностных сил, приложенных к частицам этого объема. Иными словами, закон сохранения момента количества движения может быть сформулирован в виде

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int\limits_{\tau} \mathbf{r} \times \mathbf{F} \rho d\tau + \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n d\Sigma \, , \qquad 5)$$

где Σ - поверхность, ограничивающая τ, $\mathbf{F}$ -плотность внешних массовых сил, $\mathbf{p}_n$ - вектор напряжения.

Покажем, что из (5) следует симметрия тензора напряжений, то есть в системе координат x_i выполняются равенства $p_{ij} = p_{ji}$.

Пользуясь определением (4) и применяя к левой части (5) формулу дифференцирования по времени интеграла по подвижному объему, с учетом уравнения неразрывности получим

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int\limits_{\tau} \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \rho + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \rho div\, \mathbf{v} \right] d\tau =$$

$$\int\limits_{\tau} \left[\rho \left(\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) + (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \frac{d\rho}{dt} - (\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, \frac{d\rho}{dt} \right] d\tau = \int\limits_{\tau} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \rho\, d$$

Второе слагаемое в правой части (5) преобразуем по формуле Гаусса-Остроградского к виду

$$\int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\times\mathbf{p}_n d\Sigma = \int\limits_{\Sigma} \mathbf{r}\times\sum_{i=1}^{3}\mathbf{p}_i \cos(\mathbf{n}, x_i) d\Sigma = \int\limits_{\tau} \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\times\mathbf{p}_i + \mathbf{r}\times div\,\Pi\right) d$$

Объединяя (5)-(7), находим

$$\int\limits_{\tau} \mathbf{r}\times\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\rho - \mathbf{F}\rho - div\,\Pi\right) d\tau = \int\limits_{\tau} \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i}\times\mathbf{p}_i\, d\tau\,.$$

Так как в силу уравнения движения левая часть последнего равенства обращается в нуль, а векторы $\partial \mathbf{r}/\partial x_i$ - это единичные векторы координатных осей, то вследствие произвольности объема τ обращается в нуль каждая из компонент суммы по i векторов $\partial \mathbf{r}/\partial x_i \times \mathbf{p}_i$. Раскрывая векторное произведение, приходим к равенствам $p_{ij} = p_{ji}$.

Заметим в заключение этого параграфа, что в случае симметричного тензора П закон сохранения момента количества движения (5) следует из уравнения движения. В то же время в более общем случае среды, обладающей собственными моментами количества движения, и при наличии внешних массовых и поверхностных пар сил закон сохранения момента количества движения, вообще говоря, не вытекает из уравнения движения.

Условие непротекания на произвольной поверхности.

В задачах обтекания тел жидкостью или газом часто используется условие непротекания, в соответствии с которым на поверхности обтекаемого тела принимается равной нулю нормальная составляющая вектора скорости частиц относительно поверхности. Запишем это условие для обтекания произвольной поверхности Σ, заданной уравнением $f(x, y, z, t) = 0$. Выберем в момент времени t точку $M(x, y, z)$, принадлежащую Σ. Пусть $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$ - единичный вектор нормали к Σ в точке M. В момент времени $t + \Delta t$ рассматриваемая поверхность займет положение Σ'. Выбрав на Σ' точку M', лежащую на продолжении $\mathbf{n}$, назовем по определению скоростью поверхности Σ величину $N = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (\Delta s / \Delta t)$, где $\Delta s = MM'$.

Но

$$n_x = \frac{\partial f / \partial x}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}},$$

$$n_y = \frac{\partial f / \partial y}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}},$$

$$n_z = \frac{\partial f / \partial z}{\sqrt{(\partial f / \partial x)^2 + (\partial f / \partial y)^2 + (\partial f / \partial z)^2}}$$

и $f(x + n_x \Delta s, y + n_y \Delta s, z + n_z \Delta s, t + \Delta t) = 0.$

Следовательно,

$$N = \frac{ds}{dt} = -\frac{\partial f/\partial t}{\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + (\partial f/\partial z)^2}}$$

и условие непротекания приобретает вид

$$\mathbf{vn} = v_n = N = -\frac{\partial f/\partial t}{\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 + (\partial f/\partial z)^2}} \qquad (1)$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_x\frac{\partial f}{\partial x} + v_y\frac{\partial f}{\partial y} + v_z\frac{\partial f}{\partial z} = 0\,.$$

Очевидно, что в случае потенциального движения, когда $\mathbf{v} = grad\,\varphi$, условие непротекания выражается равенством $\partial\varphi/\partial n = N$.