МАТЕМАТИКА

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Наталья Владимировна
Крупина

Москва,
2021

Уравнения вида tg x=a

Из определения тангенса следует, что $\operatorname{tg} x$ может принимать любое действительное значение. Поэтому уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a.

Задача 1 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

▶ Построим углы, тангенсы которых равны $\sqrt{3}$. Для этого проведём через точку P (рис. 76) прямую, перпендикулярную PO, и отложим отрезок $PM = \sqrt{3}$; через точки M и O проведём прямую. Эта прямая пересекает единичную окружность в двух диаметрально противоположных точках M_1 и M_2. Из прямоугольного треугольника POM находим $\frac{PM}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = \operatorname{tg} x_1$, откуда $x_1 = \frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается из точки $P(1; 0)$ поворотом вокруг начала координат на угол $\frac{\pi}{3}$,

а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Точка M_2 получается поворотом точки $P(1; 0)$ на угол $x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi$, а также на углы $x = \frac{\pi}{3} + \pi + 2\pi k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

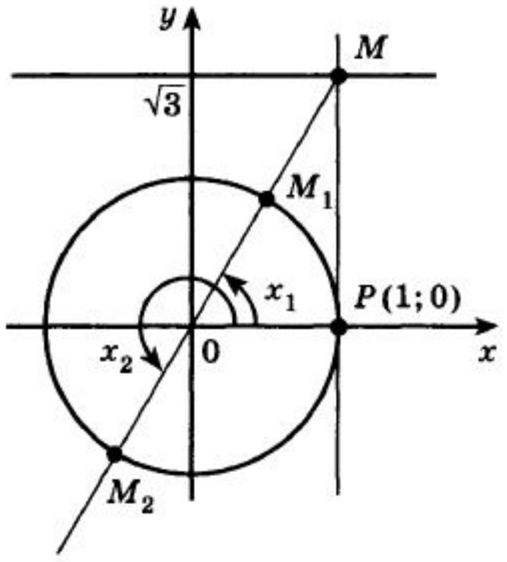


Рис. 76

Итак, корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ можно найти по формулам $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k + 1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Эти формулы объединяются в одну:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Уравнения вида tg x=a

Задача 2 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

► Углы, тангенсы которых равны $-\sqrt{3}$, указаны на рисунке 77, где $PM \perp PO$, $PM = \sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника POM находим $\angle POM = \frac{\pi}{3}$,

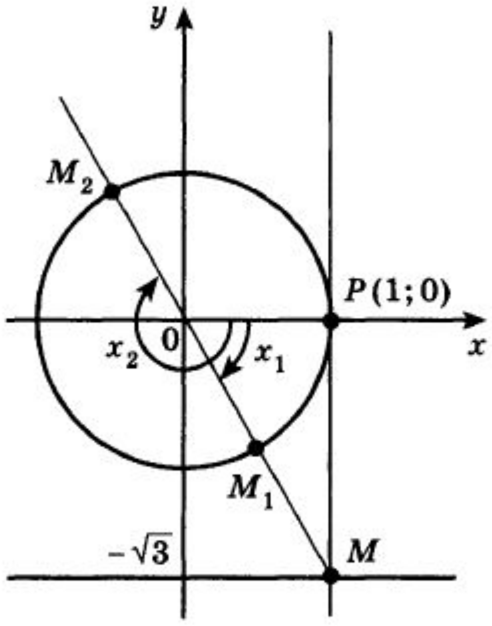


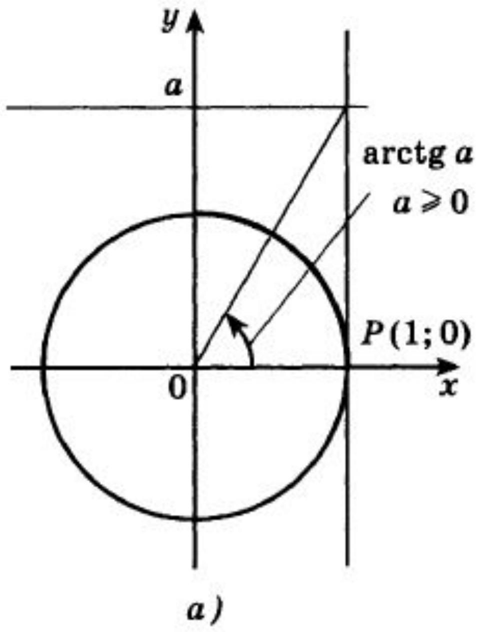
Рис. 77

т. е. $x_1 = -\frac{\pi}{3}$. Таким образом, точка M_1 получается поворотом точки $P(1; 0)$ вокруг начала координат на угол $x_1 = -\frac{\pi}{3}$, а также на углы $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k = \pm1, \pm2, \ldots$. Точка M_2 получается поворотом точки $P(1; 0)$ на углы $x = -\frac{\pi}{3} + \pi(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Поэтому корни уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ можно найти по формуле

$$x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \ \triangleleft$$

Уравнения вида tg x=a

Итак, каждое из уравнений $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ имеет бесконечное множество корней. На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ каждое из этих уравнений имеет только один корень: $x_1 = \frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ и $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ — корень уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. Число $\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $\sqrt{3}$ и записывают $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; число $-\frac{\pi}{3}$ называют арктангенсом числа $-\sqrt{3}$ и пишут $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$. Вообще, уравнение $\operatorname{tg} x = a$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$ имеет на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ только один корень. Если $a \geqslant 0$, то корень заключён в промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$; если $a < 0$, то в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Этот корень называют *арктангенсом числа a* и обозначают $\operatorname{arctg} a$ (рис. 78).



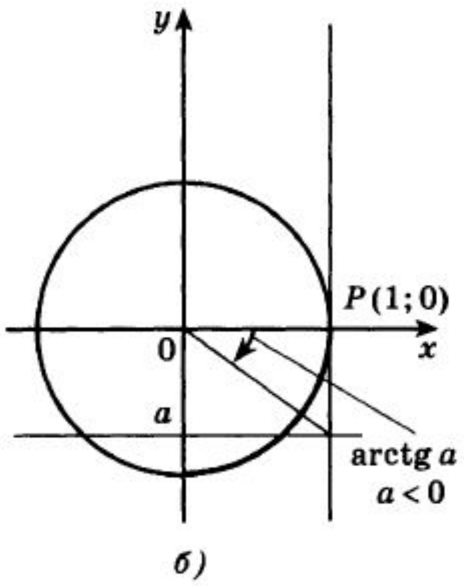


Рис. 78

Уравнения вида tg x=a

Арктангенсом числа $a \in R$ называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a:

$$\mathbf{arctg}\ a = \alpha,\ \text{если}\ \mathbf{tg}\ \alpha = a\ \text{и}\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Например, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$ и $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$.

Уравнения вида tg x=a

Аналогично тому, как это сделано при решении задач 1 и 2, можно показать, что все корни уравнения $\operatorname{tg} x = a$, где $a \in \mathbf{R}$, выражаются формулой

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \qquad (2)$$

Задача 3 Решить уравнение $\operatorname{tg} x = 2$.

▶ По формуле (2) находим

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \triangleleft$$

Значение arctg 2 можно приближённо найти из рисунка 79, измеряя угол *POM* транспортиром.

Приближённые значения арктангенса можно также найти по таблицам или с помощью микрокалькулятора:

$$\operatorname{arctg} 2 \approx 1{,}11.$$

Уравнения вида tg x=a

Задача 4* Решить уравнение $(\text{tg}\,x+4)(\text{ctg}\,x-\sqrt{3})=0$.

▶ 1) $\text{tg}\,x+4=0$, $\text{tg}\,x=-4$, $x=\text{arctg}\,(-4)+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

При этих значениях x первый множитель левой части исходного уравнения обращается в нуль, а второй не теряет смысла, так как из равенства $\text{tg}\,x=-4$ следует, что $\text{ctg}\,x=-\frac{1}{4}$. Следовательно, найденные значения x являются корнями исходного уравнения.

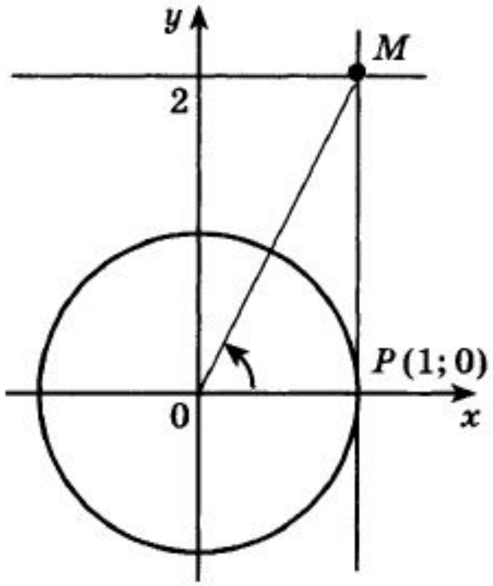


Рис. 79

2) $\text{ctg}\,x-\sqrt{3}=0$, $\text{ctg}\,x=\sqrt{3}$,

$\text{tg}\,x=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $x=\text{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi n=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

Эти значения x также являются корнями исходного уравнения, так как при этом второй множитель левой части уравнения равен нулю, а первый не теряет смысла.

Ответ $x=\text{arctg}\,(-4)+\pi n$, $x=\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. ◁

Уравнения вида tg x=a

Можно доказать, что для любого $a \in R$ справедлива формула

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a. \qquad (3)$$

Эта формула позволяет находить значения арктангенсов отрицательных чисел через значения арктангенсов положительных чисел. Например:

$$\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3},$$

$$\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Уравнения вида tg x=a

Упражнения

Вычислить (607—608).

607 1) $\operatorname{arctg} 0$; 2) $\operatorname{arctg} (-1)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$.

608 1) $6\operatorname{arctg}\sqrt{3} - 4\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

2) $2\operatorname{arctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

609 Сравнить числа:

1) $\operatorname{arctg}(-1)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ и $\arccos\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{arctg}(-3)$ и $\operatorname{arctg} 2$; 4) $\operatorname{arctg}(-5)$ и $\operatorname{arctg} 0$.

Решить уравнение (610—612).

610 1) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$;

4) $\operatorname{tg} x = -1$; 5) $\operatorname{tg} x = 4$; 6) $\operatorname{tg} x = -5$.

611 1) $\operatorname{tg} 3x = 0$; 2) $1 + \operatorname{tg}\frac{x}{3} = 0$; 3) $\sqrt{3} + \operatorname{tg}\frac{x}{6} = 0$.

Уравнения вида tg x=a

612 1) $(\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg} x + \sqrt{3}) = 0$;

2) $(\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg} x - \sqrt{3}) = 0$;

3) $(\operatorname{tg} x - 2)(2\cos x - 1) = 0$;

4) $(\operatorname{tg} x - 4{,}5)(1 + 2\sin x) = 0$;

5) $(\operatorname{tg} x + 4)\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = 0$;

6) $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{6} + 1\right)(\operatorname{tg} x - 1) = 0$.

613 Найти наименьший положительный и наибольший отрицательный корни уравнения $3\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

614 Решить уравнение:

1) $\operatorname{arctg}(5x - 1) = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}(3 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$.

615 Доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ при любом a. Вычислить:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2{,}1)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}3))$;

3) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 7)$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 6\right)$.

616 Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha$ при $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0{,}5)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 13)$.

Уравнения вида tg x=a

616 Доказать, что $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha)=\alpha$ при $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Вычислить:

1) $3\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right)$; 2) $4\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}0{,}5)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{8}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}13)$.

617 Вычислить:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\right)$; 2) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}\right)$;

3) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; 4) $\operatorname{arctg}\left(2\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

618 Доказать, что при любом действительном значении a справедливо равенство $\cos(\operatorname{arctg}a)=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

619 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $\operatorname{tg}x=9$; 2) $\operatorname{tg}x=-7{,}8$.