Повторение

РАЗБОР ПРОБНОГО ВАРИАНТА ЭКЗАМЕНАЦИОННОЙ РАБОТЫ

УВАЖАЕМЫЕ СТУДЕНТЫ!

Мы с вами приступаем к повторению тем по математике и подготовке к экзамену. Разберем пробный вариант экзаменационной работы. Обратите внимание на запись решения каждого вида заданий.

Образец решения оформите себе в тетрадь.

1. Решите неравенство $\frac{x - 4x^2}{x - 1} > 0$.

2. Решите уравнение $\log_2 (2x - 1) = 3$.

3. Найдите корни уравнения $2 \sin x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 1). Укажите:

а) область определения функции;

б) промежутки возрастания и убывания функции;

в) при каких значениях x $f(x) = 0$;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) при каких значениях x $-4 < f(x) < 2$.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

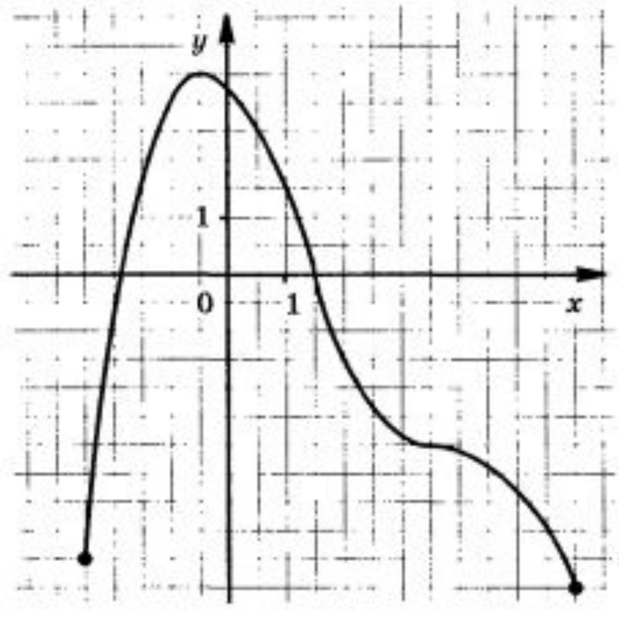


Рис. 1

1. Решите неравенство $\dfrac{x-4x^2}{x-1} > 0.$

Просмотрите объяснение и запись решения этого задания. Большинство заданий первого номера составляют неравенства данного вида.

Решение дробно-рациональных неравенств.

$$\frac{x-4x^2}{x-1} > 0$$

1) $\dfrac{4x^2-x}{x-1} < 0$

2) $\begin{cases} 4x^2-x=0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$

3) $4x^2-x=0$

$x(4x-1)=0$

$x_1=0$ или $4x-1=0$

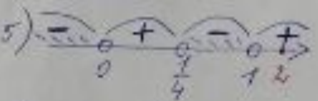
$4x=1$

$x_2=\frac{1}{4}$

4) $x-1 \neq 0$

$x_3 \neq 1$

5)



Ответ: $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right)$

1. Проверим, чтобы x^2 был положительным.
2. Поменяем числа в числителе местами и изменим знак неравенства с > на <
3. Решаем по отдельности: верхняя часть = 0, нижняя часть ≠ 0, т.к. на 0 делить нельзя!
4. Чертим числовую прямую. Отмечаем все найденные точки.

Если знаки:				
> <	точки	o	скобки	( )
≥ ≤	точки	•	скобки	[ ]

Дугами отмечаем интервалы
5. Определяем знак интервала. Выбираем любое число из интервала (чаще 0 или 1), если не занято. Например, 2. Подставляем в неравенство, где поменяли знак.

$$\frac{4\cdot 2^2-2}{2-1} = \frac{16-2}{1} = 14 > 0,$$

значит на интервале +. Остальные знаки чередуем.
6. Заштриховываем нужные интервалы: если знак > с +, если знак < с −
7. Пишем ответ.

2. Решите уравнение $\log_2(2x-1)=3$.

Решение логарифмических уравнений

$\log_2(2x-1)=3$

1) $\log_2(2x-1)=\log_2 2^3$

2) $2x-1=2^3$

3) $2x=8+1$

$2x=9$

$x=\frac{9}{2}$

$x=4,5$

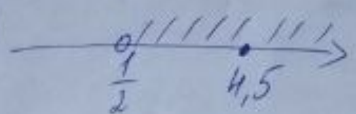
4) ОДЗ:

$2x-1>0$

$2x>1$

$x>\frac{1}{2}$

5)



6) Ответ: $x=4,5$

1. В левой и правой части каждое число должно стоять с log. Заменим 3 логарифмом.

$\boxed{b=\log_a a^b}$ $3=\log_2 2^3$

2. Откидываем $\log_2$ и записываем число без логарифмов.
3. Решаем
4. Находим ОДЗ. Под знаком логарифма всегда стоит положительное число. Значит выражение с x в первоначальном примере должно быть больше нуля.
5. Отмечаем на прямой
6. Проверяем вошел ли корень в заштрихованную область.
7. Пишем ответ.

3. Найдите корни уравнения $2\sin x + 1 = 0$, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$.

Для выполнения данного задания нужно вспомнить формулы для решения тригонометрических уравнений.

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin t + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = t, \text{при } |t| \le 1 \Leftrightarrow x = \pm \arccos t + 2\pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = t, \text{при } x \ne \frac{\pi}{2} + \pi n \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} t + \pi n, n \in Z$$

Частные случаи

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, n \in Z$$

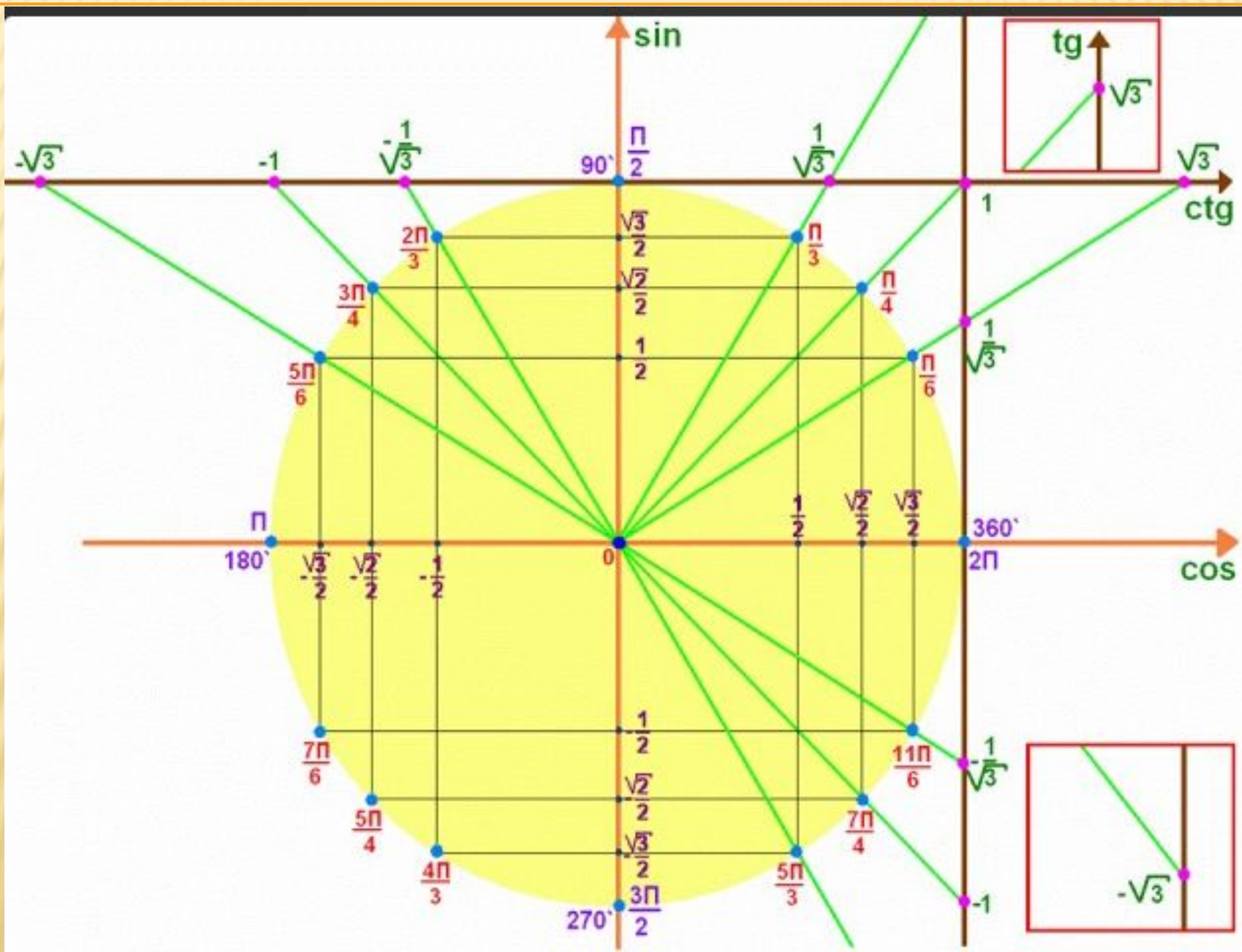
$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = -\pi + 2\pi n, n \in Z$$

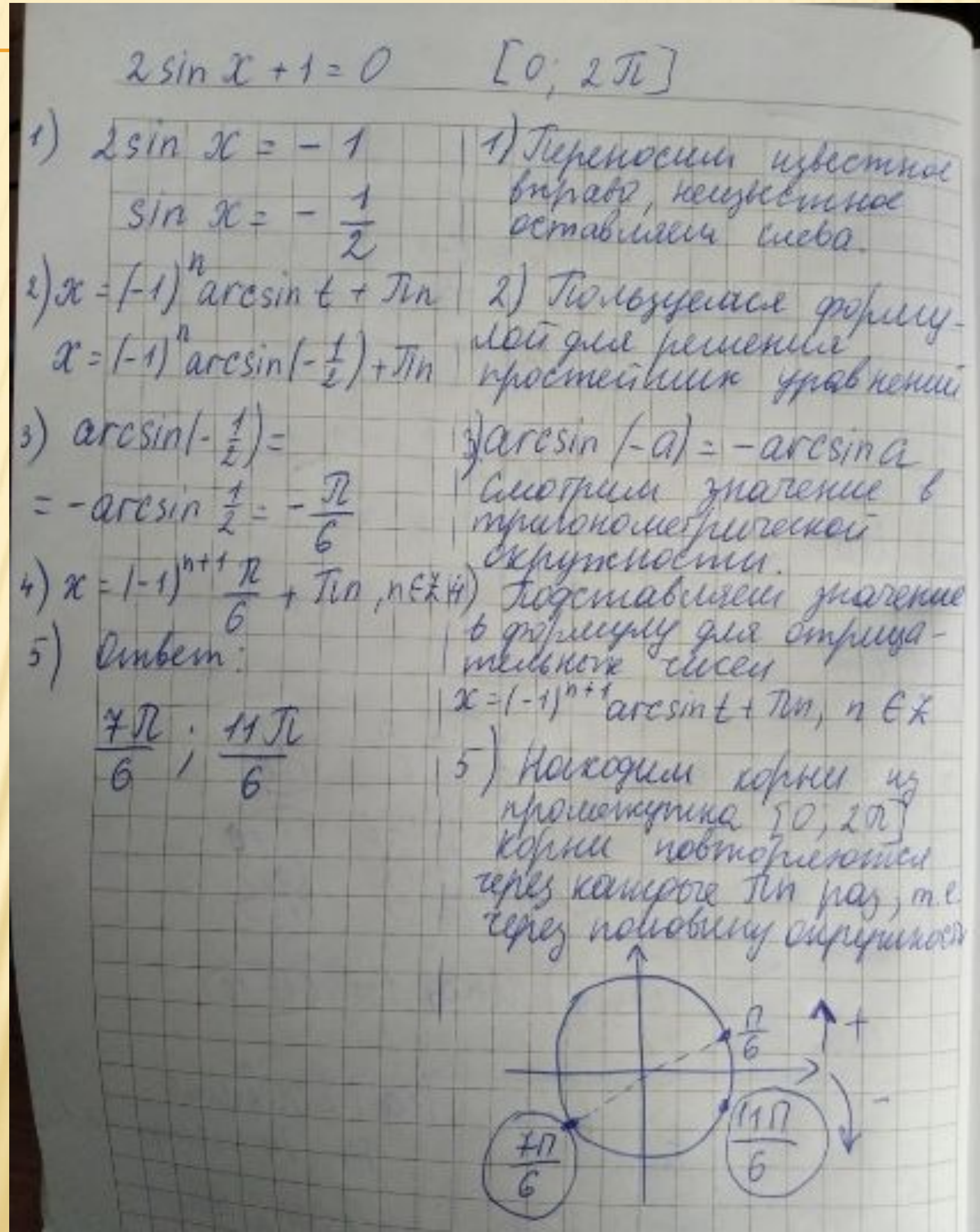
$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n, n \in Z$$

А также пригодится тригонометрическая окружность



ЗАПИСЬ РЕШЕНИЯ БУДЕТ ВЫГЛЯДЕТЬ СЛЕДУЮЩИМ ОБРАЗОМ


$2\sin x + 1 = 0 \quad [0; 2\pi]$

1) $2\sin x = -1$

$\sin x = -\frac{1}{2}$

2) $x = (-1)^n \arcsin t + \pi n$

$x = (-1)^n \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi n$

3) $\arcsin(-\frac{1}{2}) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$

4) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

5) Ответ: $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}$

1) Переносим известное вправо, неизвестное оставляем слева.

2) Пользуемся формулой для решения простейших уравнений

3) $\arcsin(-a) = -\arcsin a$

Смотрим значение в тригонометрической окружности.

4) Подставляем значение в формулу для отрицательных чисел

$x = (-1)^{n+1} \arcsin t + \pi n, n \in Z$

5) Находим корни из промежутка $[0; 2\pi]$

Корни повторяются через каждые πn раз, т.е. через половину окружности

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 1). Укажите:

а) область определения функции;

б) промежутки возрастания и убывания функции;

в) при каких значениях x $f(x) = 0$;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) при каких значениях x $-4 < f(x) < 2$.

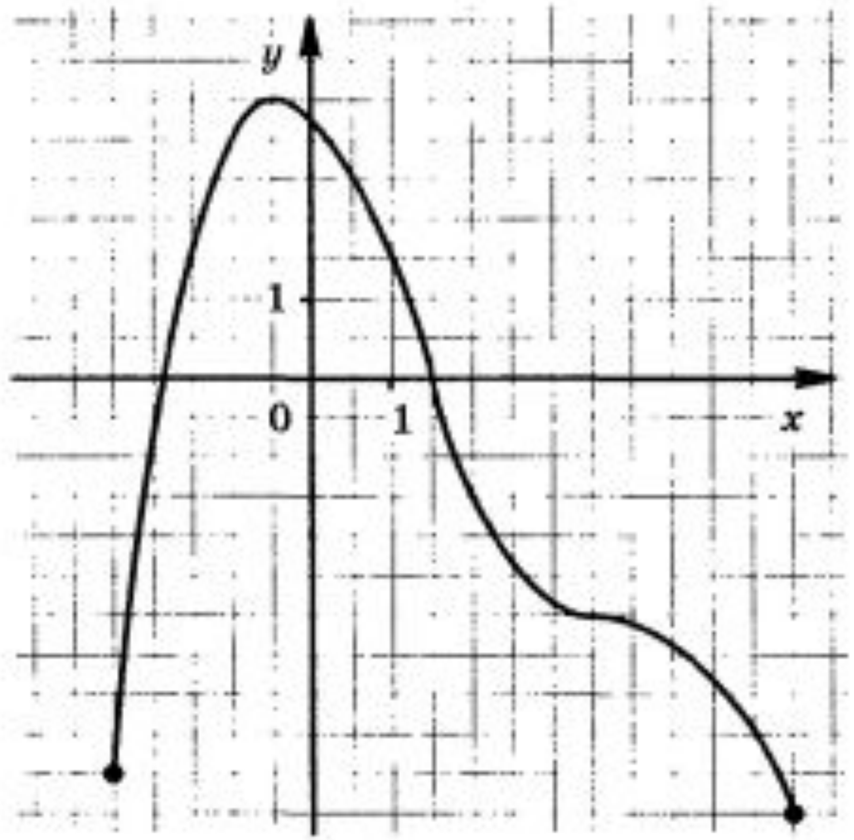
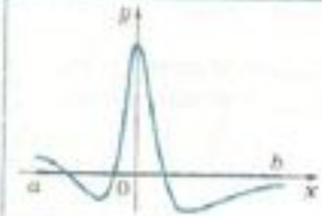
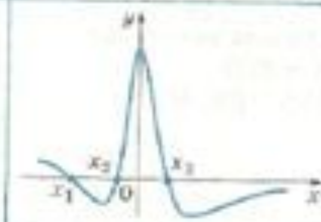
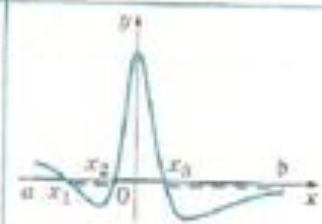
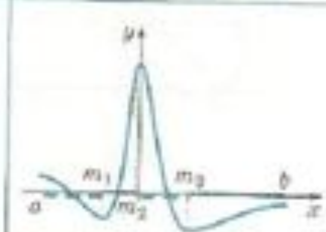
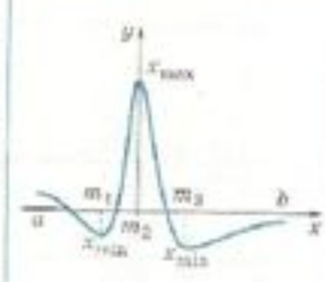
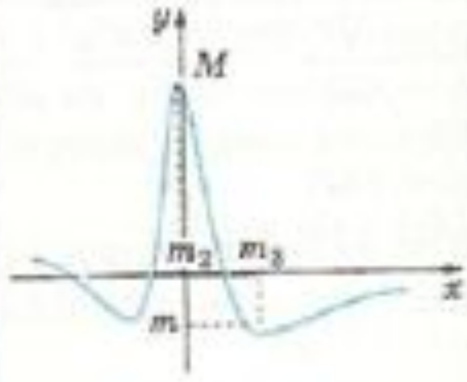
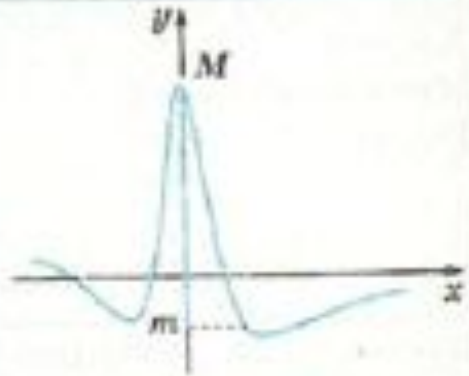


Рис. 1

Способ представления функции		
Символический	Словесный	Графический
$y = f(x)$ Область определения: $D = D(f)$ $D(f) = [a; b]$	Область определения функции — множество значений аргумента, при которых функция задана, определена. Геометрически — это проекция графика функции на ось x	
Нули функции: $f(x) = 0$ Множество нулей: $\{x_1, x_2, x_3\}$	Нули функции — точки, в которых функция обращается в нуль. Эти точки являются решениями уравнения $f(x) = 0$. Геометрически — это абсциссы точек пересечения графика функции с осью x	
Промежутки постоянного знака: $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$ $f(x) > 0$: $[a; x_1) \cup (x_2; x_3)$ $f(x) < 0$: $(x_1; x_2) \cup (x_3; b]$	Промежутки постоянного знака — множества решений неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$. Геометрически — это интервалы оси x, соответствующие точкам графика, лежащим выше (или ниже) этой оси	
Промежутки монотонности: $f(x)\uparrow$ или $f(x)\downarrow$ $f(x)\uparrow$: $[m_1; m_2] \cup [m_3; b]$ $f(x)\downarrow$: $[a; m_1] \cup [m_2; m_3]$	Промежутки монотонности — промежутки оси x, на которых функция возрастает (промежутки возрастания) или убывает (промежутки убывания). Геометрически — это интервалы оси x, где график функции идет вверх или вниз	
Точки экстремума: x_{max} и x_{min} x_{max}: m_2 x_{min}: m_1, m_3	Точки экстремума — точки, лежащие внутри области определения, в которых функция принимает самое большое (максимум) или самое малое (минимум) значения по сравнению со значениями в близких точках. Геометрически — около точек экстремума график функции выгибается выпуклостью вверх или вниз	

Способ представления функции		
Символический	Словесный	Графический
	Обычно точки экстремума разделяют промежутки монотонности	
Наибольшее и наименьшее значения: $y_{наиб}$ и $y_{наим}$ $y_{наиб} = M$ при $x = m_2$ $y_{наим} = m$ при $x = m_3$	Говорят, что в точке x_0 функция f принимает наибольшее (наименьшее) значение, если $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) для любого значения x. Само число $f(x_0)$ и называется наибольшим (наименьшим) значением функции. Геометрически — это ординаты самой высокой (самой низкой) точки графика	
Область значений: $E = E(f)$ $E(f) = [m; M]$	Область значений функции — множество чисел, состоящее из всех значений функции. Геометрически — это проекция графика функции на ось y	

4. а) $D(f) = [-2,5; 6]$

б) $f(x) \nearrow [-2,5; -0,5]$

$f(x) \searrow [-0,5; 6]$

в) $f(x) = 0$ при $x = -1,8$

$x = 1,5$

г) $y_{наиб.} = 3,5$

$y_{наим} = -5,5$

д) $-4 < f(x) < 2$ при

$x \in (-2,4; -1,4) \cup (0,8; 5,2)$

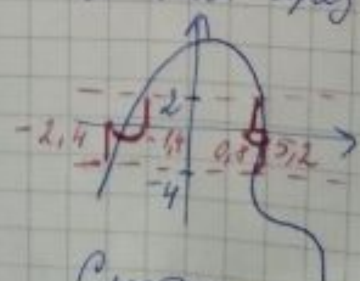
а) От какой точки до какой по оси x существует график

б) Значения смотрим по оси x, пишем от меньшего к большему.

в) точки пересечения с осью x

г) Самое большое и маленькое значение по оси y.

д) Смотрим по оси x, где функция меньше чем -4 и больше, чем 2. Для этого мысленно проводим линии через точки



Смотрим промежутки

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

При нахождении первообразных используется таблица первообразных. В конце всегда пишется +С, т.к. существует множество первичных функций

Функция	Первообразная	Функция	Первообразная
1) $f(x)=k$	$F(x)=kx$	6) $f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$
2) $f(x)=x^r$ $(r\neq -1)$	$F(x)=\frac{x^{r+1}}{r+1}$	7) $f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
		8) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
3) $f(x)=\frac{1}{x}$	$F(x)=\ln \lvert x\rvert$	9) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
4) $f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	10) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$
5) $f(x)=a^x$	$F(x)=\frac{a^x}{\ln a}$	11) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$

Запись решения.

5) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

$F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + 5x + C =$

$= \frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$

Ответ: $\frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$

1) По таблице первообразных находим значения каждой функции

2) В конце всегда добавляем $+ C$

3) Упрощаем, пишем ответ.

Выполните задания на основе образца

1. Решите неравенство

$$\frac{(x-6)(x-8)}{2x-7} < 0.$$

2. Решите уравнение

$$5^{x+1} + 5^{x} + 5^{x-1} = 31.$$

3. Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 1.$

4. Функция $y = f(x)$ задана своим графиком (рис. 2). Укажите:

а) область определения функции;

б) нули функции;

в) промежутки возрастания и промежутки убывания функции;

г) наибольшее и наименьшее значения функции;

д) при каких значениях x $f(x) < -2$.

5. Найдите все первообразные функции

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

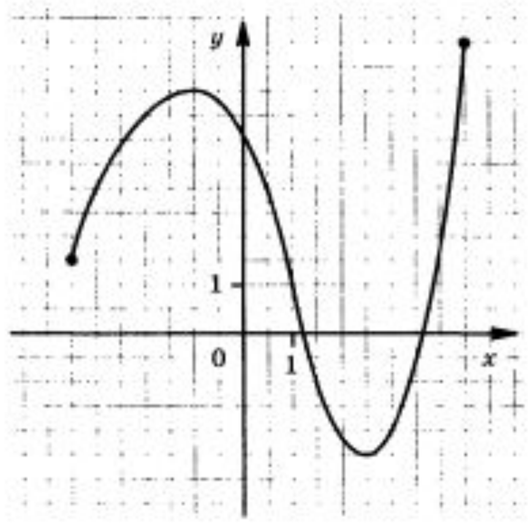


Рис. 2

ВОЗМОЖНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПЕРВОГО НОМЕРА

Степень с натуральным показателем	
$a^1 = a$ $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$ $\quad a \in R,\ n \in N,\ n \geqslant 2$	**Примеры.** $3^1 = 3$; $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$; $0^n = 0$; $1^n = 1$; $n \in N$
Степень с целым показателем	
$a^0 = 1$ $\quad a \neq 0$	**Примеры.** $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$; 0^0 — не определена
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\quad a \neq 0,\ n \in N$	**Примеры.** $7^{-1} = \frac{1}{7}$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$; 0^{-3} — не определена
Степень с дробным показателем	
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\quad a \geqslant 0,\ n \in N,\ n \geqslant 2$	**Примеры.** $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$, $(-8)^{\frac{1}{3}}$ — не определена
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $\quad a > 0,\ n \in N,\ n \geqslant 2,\ m \in Z$	**Примеры.** $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 2^3 = 8$; $3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$
Свойства степеней	
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	**Пример.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

Возможные задания для 1 номера основаны на свойствах степеней.

Вспомните эти свойства и выполните письменно задания.

ВОЗМОЖНЫЕ ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ 1 НОМЕРА

ПРИМЕР:

Вычислите

$$9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}.$$

РЕШЕНИЕ:

$$9^{\frac{3}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} + (3^3)^{\frac{2}{3}} - (2^{-4})^{-\frac{3}{4}} = 3^3+3^2-2^3=28.$$

Свойства

1) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$;

2) $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$;

3) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$;

4) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$;

5) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$.

ВЫПОЛНИТЕ ЗАДАНИЯ

Вычислите $25^{1,5} + (0,25)^{-0,5} - 81^{0,75}$.

. Вычислите $9^{1,5} - 81^{0,5} - (0,5)^{-2}$.

. Вычислите $16^{\frac{5}{4}} - \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}}$.

Упростите

$$a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{5}{3}}a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{1}{6}}.$$

. Упростите $a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{7}{12}}a^{-\frac{3}{4}}b^{-\frac{2}{3}}$.

Упростите $a^{-\frac{9}{2}}b^{\frac{1}{12}} : \left(a^{-\frac{19}{4}}b^{\frac{1}{3}}\right)$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ:

ВЫПОЛНИТЬ ЗАДАНИЯ ИЗ ПРЕЗЕНТАЦИИ. ВОПРОСЫ ПО РАБОТЕ ЗАДАВАЙТЕ ПО ЭЛЕКТРОННОЙ ПОЧТЕ katja.pavlova@mail.ru ИЛИ В СООБЩЕНИЯХ ВКОНТАКТЕ.

УДАЧИ!