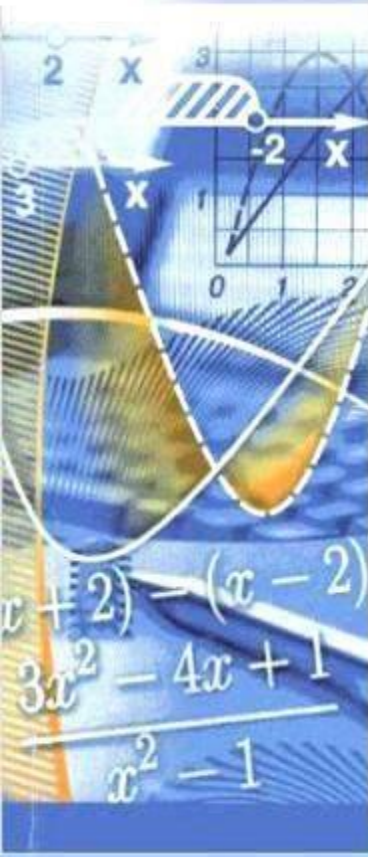




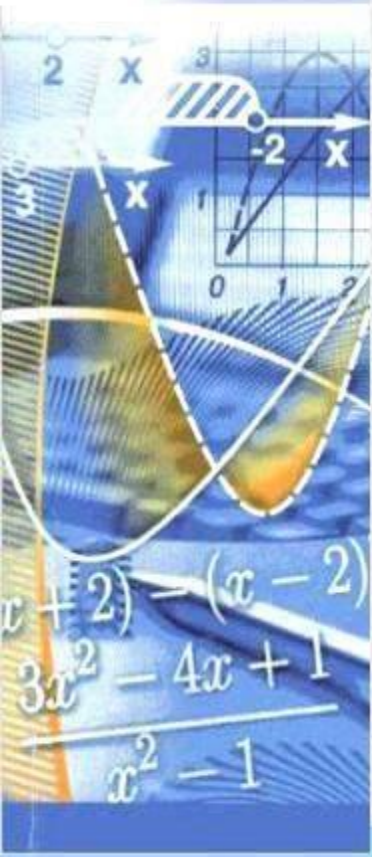
«ЛОГАРИФМИЧЕСК ИЕ УРАВНЕНИЯ»





Определение

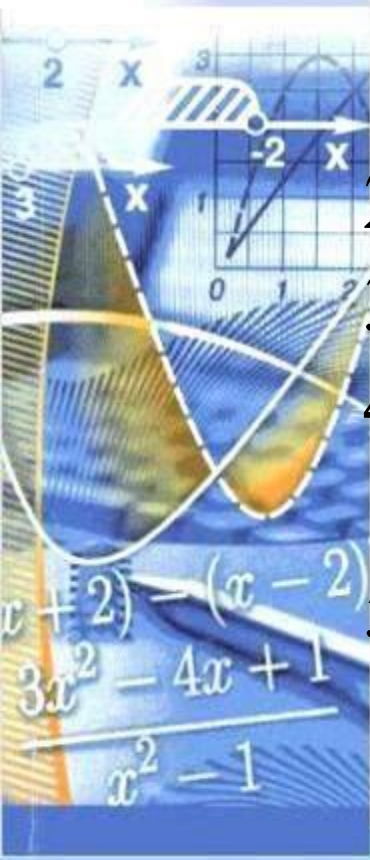
Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим $\log_a x = b$





Основные методы решения логарифмических уравнений

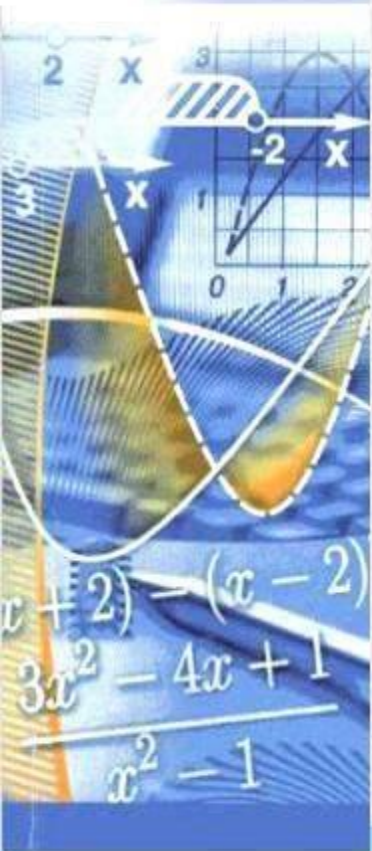
- 1) по определению логарифма
- 2) потенцирования
- 3) введения новой переменной
- 4) логарифмирования обеих частей уравнения
- 5) Приведения логарифмов к одному основанию





Этапы решения уравнения

- *Найти область допустимых значений (ОДЗ) переменной*
- *Решить уравнение, выбрав метод решения*
- *Проверить найденные корни непосредственной подстановкой в исходное уравнение или выяснить, удовлетворяют ли они условиям ОДЗ*





Виды простейших логарифмических уравнений и методы их решения

<i>Уравнение</i>	<i>Решение</i>
а) $\log_a x = b, \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1$	$x = a^b$
б) $\log_a f(x) = b, \quad a > 0 \text{ и } a \neq 1.$	$f(x) = a^b$
в) $\log_a f(x) = \log_a g(x),$ $a > 0 \text{ и } a \neq 1.$	$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$
г) $\log_{g(x)} f(x) = b$	$\begin{cases} g(x) > 0, \\ g(x) \neq 1, \\ f(x) = g(x)^b \end{cases}$





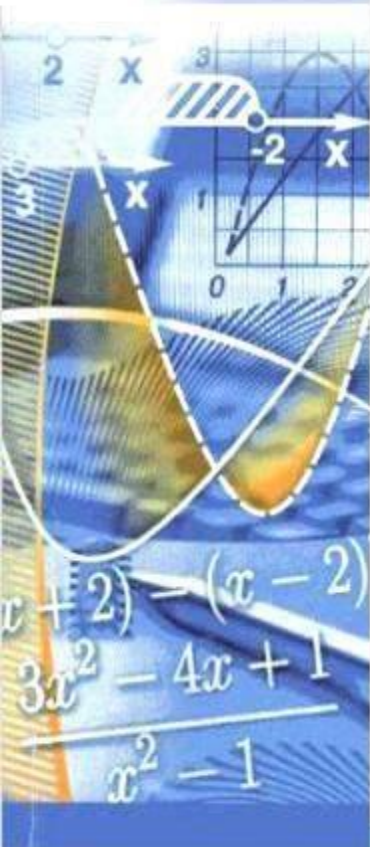
уравнения вида

$$\log_a f(x) = b, a > 0, a \neq 1.$$

решаются по определению
логарифма с учётом области
определения функции $f(x)$.

Уравнение равносильно следующей
системе

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = a^b. \end{cases}$$

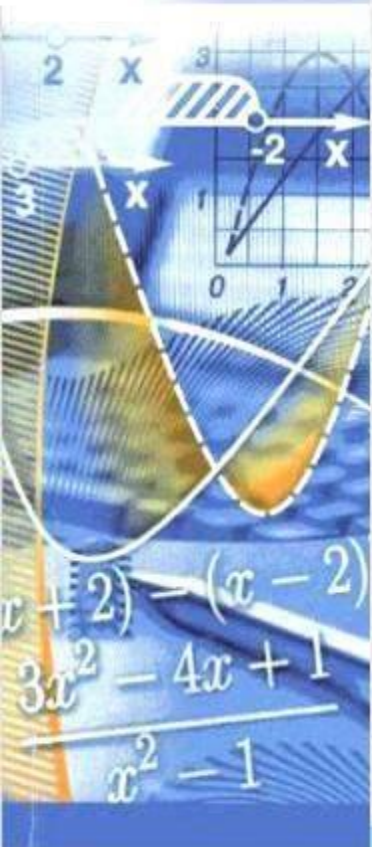




Уравнения вида $\log_{f(x)} b = c, b > 0$.

Данное уравнение равносильно
следующей системе

$$\begin{cases} b > 0, \\ f(x) > 0, f(x) \neq 1, \\ (f(x))^c = b. \end{cases}$$





Метод потенцирования применяется в том случае, если все логарифмы, входящие в уравнение, имеют одинаковое основание. Для приведения логарифмов к общему основанию используются формулы:

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$



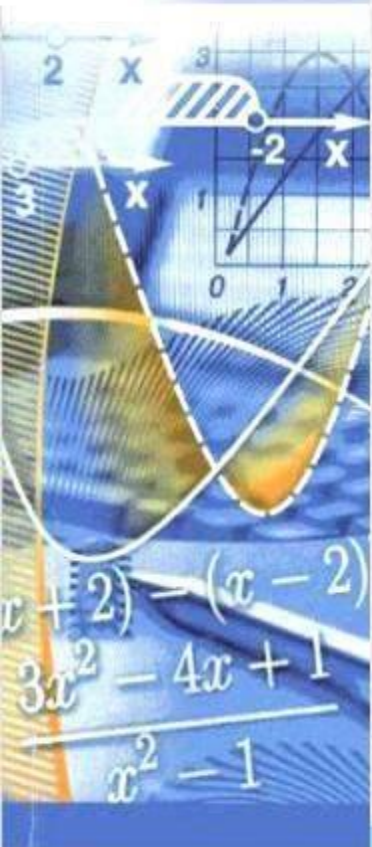
$$\log_2 x - 2 \log_x 2 = -1$$

Решение: ОДЗ: $x > 0$, $x \neq 1$

Используя формулу перехода к
новому основанию, получим

$$\log_2 x - 2 \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = -1,$$

$$\log_2 x - \frac{2}{\log_2 x} = -1.$$





Обозначим

$$\log_2 x = y.$$

$$y - \frac{2}{y} = -1,$$

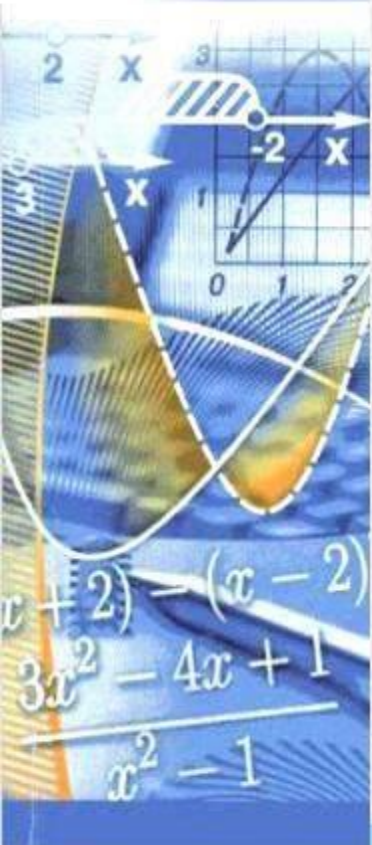
$$\frac{y^2 + y - 2}{y} = 0,$$

$$\begin{cases} y^2 + y - 2 = 0, \\ y \neq 0 \end{cases}$$

$$y_1 = -2; y_2 = 1.$$

$$a) \log_2 x = -2; x = 2^{-2}; x = \frac{1}{4}.$$

$$b) \log_2 x = 1; x = 2.$$





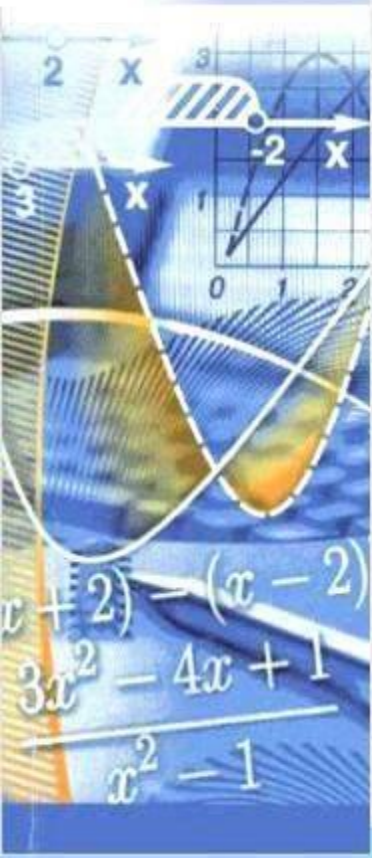
Введение новой переменной

$$A \log_a^2 f(x) + B \log_a f(x) + C = 0,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, A , B , C — действительные числа.

Пусть $t = \log_a f(x)$, $t \in \mathbb{R}$. Уравнение примет вид $t^2 + Bt + C = 0$.

Решив его, найдём x из подстановки $t = \log_a f(x)$. Учитывая область определения, выберем только те значения x , которые удовлетворяют неравенству $f(x) > 0$.





Пример 1.

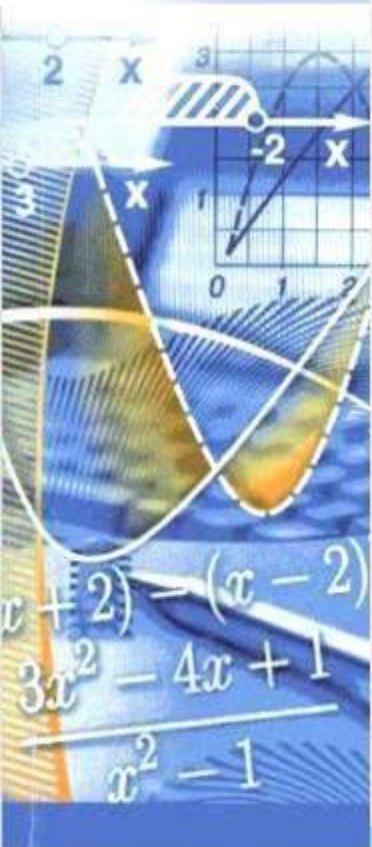
Решить уравнение $\lg^2 x - \lg x - 6 = 0$.

Решение. Область определения уравнения – интервал $(0; \infty)$.

Введём новую переменную $t = \lg x$, $t \in \mathbb{R}$.

Уравнение примет вид $t^2 - t - 6 = 0$.

Его корни $t_1 = -2$, $t_2 = 3$.

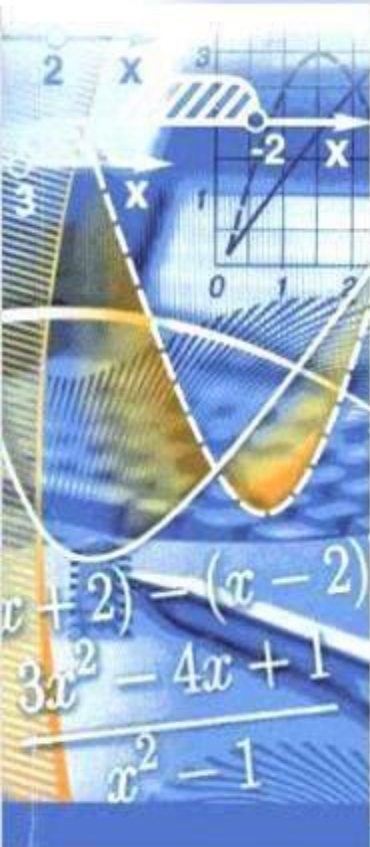




Вернёмся к первоначальной
переменной $\lg x = -2$ или $\lg x = 3$,
 $x = 10^{-2}$ или $x = 10^3$.

Оба значения x удовлетворяют
области определения данного
уравнения ($x > 0$).

Ответ. $x = 0,01$; $x = 1000$.





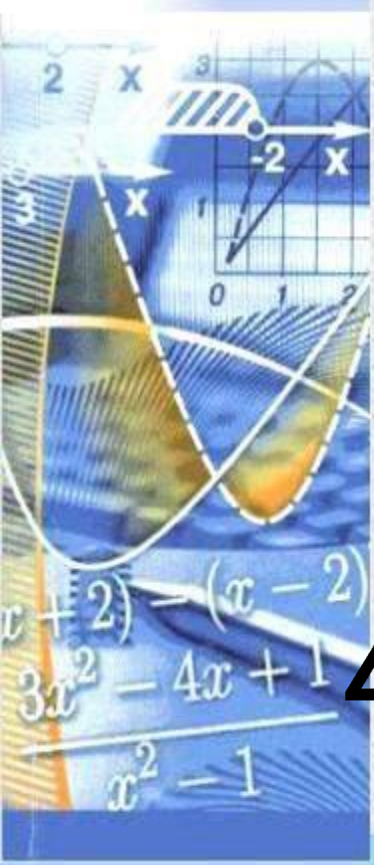
Пример 2. Решить уравнение

$$2\log_3 x^2 - \log_3^2(-x) = 4$$

Решение. Найдём область определения уравнения

$$\begin{cases} -x > 0, \\ x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad x < 0.$$

Применив формулу логарифма степени, получим уравнение


$$4\log_3 |x| - \log_3^2(-x) = 4.$$



Так как $x < 0$, то $|x| = -x$ и следовательно

$$4\log_3(-x) - \log_3^2(-x) = 4.$$

