ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

КОНСУЛЬТАЦИЯ

Выполнение лабораторных работ

Лабораторная работа №1. Постановка задачи.

Уравнение системы Y(K,L)	α, β	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества	Ограничения на управление
L	α=4, β=1	[0,9]	K(0)=1	$I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9)$	[0;+∞]

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u), \quad \text{где } x(t) - \text{траектория процесса}, \quad u(t) - \text{управление}, \quad (1)$$

на которые не наложено никаких ограничений, с начальными и конечными условиями:

$$x(t_0 = 0) = x_0, x(t = T) = x_k \quad (2)$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F(x(T)) \to min. \quad (3)$$

Требуется найти такой процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

Задание: **методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{K^*(t), L^*(t)\}$ накопления капитала от начального значения $K(0) = K^0$ до конечного значения $K(T) = K^1$ за фиксированное время T, если уравнение динамической системы имеет следующий вид:**

$$\frac{d}{dt}K(t) = \alpha Y(K,L) - \beta K,$$

где $K(t)$- величина капитала, причем $K(0) = 1$;

$L(t)$ – управление;

$Y(K,L) := a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2}$;

$a0 = 1,\ a1 = 0,\ a2 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 2$ - константы;

$t \in [0,1]$, т.е. T=1 год.

Критерий оптимальности имеет вид:

$$I = \int_0^T (L^2(t) + K^2(t))dt + F(K(T)).$$

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем дифференциальное уравнение системы, т.к. Y(K, L)=L :

$$\frac{dK}{dt} = 4L - K$$

Т.к. $t \in [0, 9]$ то $t_0 = 0;\quad T = 9$

K(0)=1

$$I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9) \to min$$

Лабораторная работа №1. Вспомогательные соотношения.

Описание метода

Введем в рассмотрение гамильтониан H и вектор сопряженных переменных Лагранжа $p(t)$:

$$H(x,u,p) = p \cdot f(x,u) - f_0(x,u) \qquad (4)$$

и уравнение трансверсальности:

$$p(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x} \qquad (5)$$

Принцип максимума Понтрягина (формулировка):

Пусть $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ – оптимальный процесс в поставленной задаче оптимального управления. Тогда существует сопряженная функция $p(t)$, удовлетворяющая вместе с данным процессом следующим условиям:

$1^0.\ H(x^*,u^*,p) = \max_u H(x,u,p)$ при $\forall t \in [0,T]$

$2^0.\ \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ при $\forall t \in [0,T]$ (6)

$3^0.\ p(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x}$.

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем дифференциальное уравнение системы, т.к. Y(K, L)=L :

$$\frac{dK}{dt} = 4Lmax - K; \quad t \in [0,9]; \quad t_0 = 0; \quad T = 9; K(0)=1; I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9) \ \to min$$

$$H(K,L,p) = p \cdot (4L - K) - (-K^2 + L^2); \quad \frac{\partial H}{\partial L} = 4p - 2L; 4p - 2L = 0; \quad Lmax = 2p;$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -p + 2K; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = p - 2K; \quad \text{т.к. } F(x(T)) = -0{,}5K, \quad \text{то } \frac{\partial F}{\partial K} = -0.5; \ \text{тогда } p(9) = 0.5$$

Лабораторная работа №1.
Программирование машинного решения.

Расчетная часть:

~~$a0 := 1.00 \quad a1 := 0 \quad a2 := 1 \quad Y(K,L) := a0 \cdot K^{a1} \cdot L^{a2} \quad \alpha := 1 \quad \beta := 2$~~

$$Lmax(K,p) := a \leftarrow \left[\frac{2}{\left(\alpha p \cdot a2 \cdot a0 \cdot K^{a1}\right)}\right]^{\frac{1}{a2-2}}$$

$$f(K,p) := \alpha \cdot Y(K, Lmax(K,p)) - \beta \cdot K$$

$$fs(K,p) := -p \cdot \left(\alpha \cdot a1 \cdot a0 \cdot K^{a1-1} \cdot Lmax(K,p)^{a2} - \beta\right) + 2 \cdot K$$

$$y_0 := 1 \qquad f1(t1, v) := \begin{pmatrix} y_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \qquad t1 := 0 \qquad t2 := 1$$

$$f2(t2, y) := y_1 - 0 \qquad v_0 := 1 \qquad fmax(t, y) := \begin{pmatrix} f(y_0, y_1) \\ fs(y_0, y_1) \end{pmatrix}$$

$$a := sbval(y, t1, t2, fmax, f1, f2)$$

$$y_1 := a_0 \qquad w^{\langle 0 \rangle} := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad w_1 = -0.466$$

$$N := 100 \qquad i := 0..N \qquad z := rkfixed(w, 0, 10, N, fmax)$$

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем дифференциальное уравнение системы, т.к. Y(K, L)=L :

$$\frac{dK}{dt} = 4Lmax - K; \quad t \in [0,9]; \quad t_0 = 0; \quad T = 9;$$

$$K(0) = 1; I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9) \rightarrow min$$

$$H(K, L, p) = p \cdot (4L - K) - (-K^2 + L^2); \quad \frac{\partial H}{\partial L} = 4p - 2L; 4p - 2L = 0; \quad Lmax(K, p) = 2p;$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -p + 2K; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = p - 2K; \quad \text{т.к. } F(x(T)) = -0{,}5K, \quad \text{то } \frac{\partial F}{\partial K} = -0.5; \text{ тогда } p(9) = 0.5$$

Лабораторная работа №1. Осуществление ручного решения.

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем дифференциальное уравнение системы, т.к. Y(K, L)=L :

$$\frac{dK}{dt} = 4Lmax - K; \quad t \in [0,9]; \quad t_0 = 0; \quad T = 9;$$

$$K(0)=1; I = \int_0^9 (-K^2 + L^2)dt - 0{,}5K(9) \to min$$

$$H(K,L,p) = p \cdot (4L - K) - (-K^2 + L^2); \quad \frac{\partial H}{\partial L} = 4p - 2L; 4p - 2L = 0; \quad Lmax(K,p) = 2p;$$

$$\frac{\partial H}{\partial K} = -p + 2K; \quad \frac{\partial p}{\partial t} = p - 2K; \quad \text{т.к. } F(x(T)) = -0{,}5K, \quad \text{то } \frac{\partial F}{\partial K} = -0.5; \text{ тогда } p(9) = 0.5$$

Запишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} = 8p - K \\ \frac{dp}{dt} = p - 2K \end{cases}; \quad \text{с краевыми условиями:}$$

$K(0) = 1;\ p(9) = 0.5$ Из первого уравнения имеем: $p = \frac{1}{8}\dot{K} + \frac{1}{8}K;\ \ddot{K} = 8\dot{p} - \dot{K};\ \ddot{K} = 8p - 16K - \dot{K};$

$\ddot{K} = \dot{K} + K - 16K - \dot{K};\ \ddot{K} + 15K = 0;$ Тогда:

$$K = C_1 cos\sqrt{15}t + C_2 sin\sqrt{15}t;$$

$$p = \frac{C_1}{8}(cos\sqrt{15}t - \sqrt{15}sin\sqrt{15}t) + \frac{C_2}{8}(\sqrt{15}cos\sqrt{15}t + sin\sqrt{15}t);$$

Подставим краевые условия:

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ \frac{C_1}{8}(cos9\sqrt{15} - \sqrt{15}sin9\sqrt{15}) + \frac{C_2}{8}(\sqrt{15}cos9\sqrt{15} + sin9\sqrt{15}) = 0{,}5 \end{cases}$$

Из полученной системы находим C_1 и C_2, подставляем их в K и p, и далее p подставляем в $Lmax$.

Лабораторная работа №2. Постановка задачи.

Уравнение системы $f_1(x_1, x_2, u)$	Уравнение системы $f_2(x_1, x_2, u)$	Интервал времени	Начальные условия	Функционал качества
$x_1 + u$	x_2	[0,7]	$x_1(0)=1$, $x_2(0)=3$	$I = \int_0^7 (u^2 - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7)$

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений первого порядка:

Методом Лагранжа-Понтрягина найти оптимальный процесс $v^* = \{x^*(t), u^*(t)\}$ при начальных значениях $x_1(0)$, $x_2(0)$ за фиксированное время [0,T], если система уравнений динамической системы имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial t} = f_1(x_1, x_2, u) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} = f_2(x_1, x_2, u) \end{cases}$$

$\vec{x}(t)$ – двумерный вектор траектории (состояния) процесса, $u(t)$ – управление, на которые не наложено никаких ограничений, с начальными и конечными условиями:

$$x_1(t_0=0)=x_{10}, x_2(t=0)=x_{20} \quad (8)$$

и критерием эффективности

$$I = \int_0^T f_0(x,u,t)dt + F(x(T)) \to min. \quad (9)$$

Требуется найти такой процесс $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$, на котором бы критерий эффективности достигал своего минимального значения.

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + u \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 \end{cases}$$

Т.к. $t \in [0, 7]$ то $t_0 = 0$; $T = 7$

$x_1(0)=1$; $x_2(0)=3$

$$I = \int_0^7 (u^2 - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7) \to min$$

Лабораторная работа №2. Вспомогательные соотношения.

Принцип максимума Понтрягина (формулировка):

Пусть $v^* = \{\overrightarrow{x^*}(t), u^*(t)\}$ – оптимальный процесс в поставленной задаче оптимального управления. Тогда существует двумерный вектор сопряженных функций $\vec{p}(t)$, непрерывный и непрерывно дифференцируемый до 2-го порядка включительно, удовлетворяющий вместе с данным процессом следующим условиям:

$1^0.\ H(\overrightarrow{x^*}, u^*, \vec{p}) = \max\limits_u H(\vec{x}, u, \vec{p})$ при $\forall t \in [0, T]$

$2^0.\ \frac{\partial p_i}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ для $i = 1,2$ при $\forall t \in [0, T]$ (12)

$3^0.\ p_i(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x_i}$ для $i = 1,2.$

Подход к решению

Таким образом, принцип максимума требует решения краевой двухточечной задачи

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u),$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i},\ \text{для } i = 1,2$$

$$H(\overrightarrow{x^*}, u^*, \vec{p}) = \max_u H(\vec{x}, u, \vec{p}) \text{ при } \forall t \in [0, T]$$

для решения которой необходимо задать 4 начальных условия. Если рассматривается задача с фиксированным временем и закрепленными концами $x_1(t_0 = 0) = x_{10}, x_2(t = 0) = x_{20}$, то в такой задаче содержится необходимое число констант для определения решения задачи.

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + u \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 \end{cases}$$

Т.к. $t \in [0, 7]$, то $t_0 = 0$; $T = 7$;

$$x_1(0)=1;\ x_2(0)=3;\ I = \int_0^7 (u^2 - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7) \to min$$

Тогда $H = p_1(x_1 + u) + p_2 x_2 - (u^2 - x_1 - x_2)$;

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 - 2u = 0;\ umax = \frac{p_1}{2}.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 + 1;\ \frac{\partial H}{\partial x_2} = p_2 + 1;\ \text{тогда } \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -p_1 - 1 \\ \frac{dp_2}{dt} = -p_2 - 1 \end{cases}$$

Условия трансверсальности: $p_1(7) = 0$; $p_2(7) = 2.$

Лабораторная работа №2.
Программирование машинного решения.

В силу специфики системы MATHCAD заменим индекс переменных 1 на 0, а 2 на 1!

$$umax(x,p) := \frac{p_0}{2}$$

$$f(x,p) := \begin{pmatrix} x_0 + umax(x,p) \\ x_1 \end{pmatrix} \quad f(x,p) := \begin{pmatrix} -p_0 - 1 \\ -p_1 - 1 \end{pmatrix}$$

$$y_0 := 1 \quad y_1 := 3$$

$$f2(t2,y) := \begin{pmatrix} y_2 - 0 \\ y_3 - 2 \end{pmatrix}$$

Остальная часть программы интуитивно понятна из методических указаний и выполняется в точности по ним.

При ручном решении вначале решается система дифференциальных уравнений сопряженных переменных с учетом условий трансверсальности.

После определения сопряженных переменных находится оптимальное управление $umax = \frac{p_1}{2}$.

Найденное значение $umax$ в исходную систему дифференциальных уравнений, после чего она решается с учетом начальных условий.

В результате получаем оптимальную траекторию процесса.

С учетом заданных значений коэффициентов перепишем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 + u \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 \end{cases}$$

Т.к. $t \in [0,7]$, то $t_0 = 0$; $T = 7$;

$$x_1(0)=1;\ x_2(0)=3;\ I = \int_0^7 (u^2 - x_1 - x_2)dt - 2x_2(7) \to min$$

Тогда $H = p_1(x_1+u) + p_2x_2 - (u^2 - x_1 - x_2)$;

$$\frac{\partial H}{\partial u} = p_1 - 2u = 0;\ umax = \frac{p_1}{2}.$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 + 1;\ \frac{\partial H}{\partial x_2} = p_2 + 1;\ \text{тогда} \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = -p_1 - 1 \\ \frac{dp_2}{dt} = -p_2 - 1 \end{cases}$$

Условия трансверсальности: $p_1(7) = 0$; $p_2(7) = 2$.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ