Статистическое определение вероятности

Вероятность как предельное значение частоты.

Самостоятельная работа

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1. На столе 12 кусков пирога. В трех «счастливых» из них запечены призы. Какова вероятность взять «счастливый» кусок пирога?	1. В коробке 24 карандаша, из них 3 красного цвета. Из коробки наугад вынимается карандаш. Какова вероятность того, что он красный?	1.В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша?	1.В вазе 7 цветков, из них 3 розы. Из букета наугад вынимается цветок. Какова вероятность того, что это роза?
2. В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?	2. Из чисел от 1 до 25 наудачу выбрано число. Какова вероятность того, что оно окажется кратным 5?	2. В корзине лежат 5 яблок и 3 груши. Из корзины наугад вынимается один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?	2. В корзине 10 яблок, из них 4 червивых. Какова вероятность того, что любое взятое наугад яблоко окажется <u>не</u> червивым?

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Ошибка Даламбера.

Жан Лерон Даламбер
(1717 -1783)

Великий французский философ и математик Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов в опыте всего с двумя монетами!

Ошибка Даламбера.

Опыт. Подбрасываем две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что они упадут на одну и ту же сторону?

Решение Даламбера:

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) одна из монет упадет на «орла», другая на «решку».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 3, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

Правильное решение:

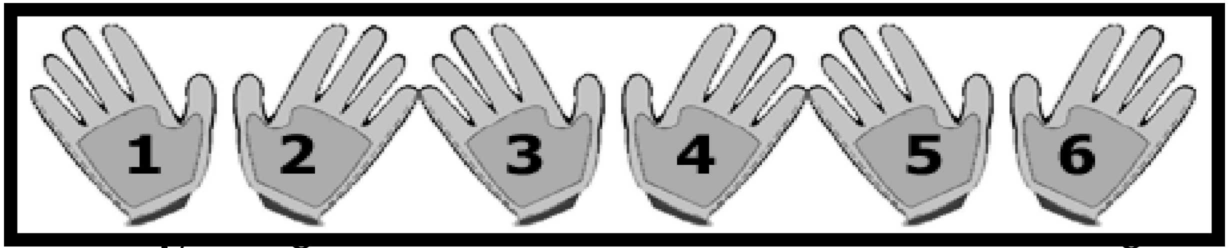
Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;
2) обе монеты упадут на «решку»;
3) первая монета упадет на «орла», вторая на «решку»;
4) первая монета упадет на «решку», вторая на «орла».

Из них благоприятными будут два исхода.

$$n = 4, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Опыт «Выбор перчаток». В коробке лежат 3 пары одинаковых перчаток. Из нее, не глядя, вынимаются две перчатки. Перечислите все равновозможные исходы.



Какой вариант решения правильный:

1-ый вариант:
3 исхода: 1) «обе перчатки на левую руку», 2) «обе перчатки на правую руку», 3) «перчатки на разные руки».

2-ой вариант:
4 исхода: 1) «обе перчатки на левую руку», 2) «обе перчатки на правую руку», 3) «первая перчатка на левую руку, вторая на правую», 4) «первая перчатка на правую руку, вторая на левую».

Правило: природа различает все предметы, даже если внешне они для нас неотличимы.

Вывод:

Формула классической вероятности дает очень простой способ вычисления вероятностей. Однако простота этой формулы обманчива. При ее использовании возникают два очень непростых вопроса:

1. Как выбрать систему исходов опыта так, чтобы они были равновозможными, и можно ли это сделать вообще?
2. Как найти числа m и n и убедиться в том, что они найдены верно?

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 1:

А можно ли вычислить вероятность события с помощью ряда экспериментов?

Опыт человечества.

Вероятность попасть под дождь
в Лондоне гораздо выше, чем в пустыне Сахара.

Весь наш жизненный опыт подсказывает, что любое событие считается тем более вероятным, чем чаще оно происходит. Значит, вероятность должна быть каким-то образом связана с частотой.

Частота случайного события.

<u>**Абсолютной частотой**</u> случайного события A в серии из N случайных опытов называется число N_A, которое показывает, сколько раз в этой серии произошло событие A.

Частота случайного события.

<u>**Относительной частотой**</u> случайного события называют отношение числа появлений этого события к общему числу проведенных экспериментов:

$$W(A) = \frac{N_A}{N}$$

где A – случайное событие по отношению к некоторому испытанию,
N раз проведено испытание и при этом событие A наступило в N_A случаях.

Примеры

Пример 1. Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 515 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?

$$W(A) = \frac{515}{1000} \approx 0,515$$

Ответ: 0,515

Примеры

Пример 2. За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? Частота пасмурных дней?

$$W(A) = \frac{67}{92} \approx 0{,}728 \qquad W(B) = \frac{25}{92} \approx 0{,}272.$$

Ответ: 0,728; 0,272.

Примеры

Пример 3. Отдел технического контроля обнаружил 5 бракованных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите частоту изготовления бракованных изделий.

Ответ: 0,005

Примеры

Пример 4. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 1000 штук. 980 семян дали нормальные всходы. Найдите частоту нормального всхода семян.

Ответ: 0,98

ПРОБЛЕМНЫЙ ВОПРОС 2:

Может быть, относительную частоту и нужно принять за вероятность?

Фундаментальным свойством относительных частот является тот факт, что *с увеличением числа опытов относительная частота случайного события постепенно стабилизируется и приближается к вполне определенному числу, которое и следует считать его* ***вероятностью.***

Проверка

Пример 5. Подбрасывание монеты. А – выпадает герб.

Классическая вероятность: всего 2 исхода, 1 исход события A: $P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$

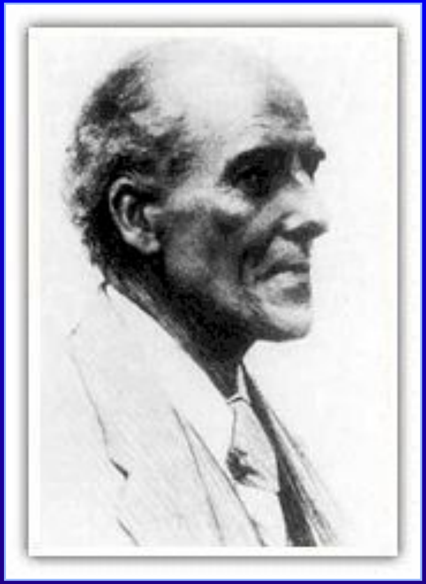
Проверка

Жорж Бюффон

Пример 5. Французский естествоиспытатель Бюффон (XVIII в.) бросил монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{2048}{4040} = 0{,}50693..$$

Проверка



Карл Пирсон

Пример 5. Английский математик Карл Пирсон (1857-1936) бросал монету 24000 раз, причем герб выпал 12012 раз. Следовательно, частота выпадения герба в данной серии испытаний равна:

$$\mu = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005.$$

Результаты

$$P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \mu = \frac{2048}{4040} = 0{,}50693..$$

$$\mu = \frac{12012}{24000} = 0{,}5005.$$

Вывод

Пример 5 подтверждает естественное предположение о том, что вероятность выпадения герба при одном бросании монеты равна 0,5.

Статистическая вероятность

<u>Вероятность случайного события</u> приближенно равна частоте этого события, полученной при проведении большого числа случайных экспериментов: $P(A) = \frac{N_A}{N}$, где N_A - число испытаний, в которых наступило событие А, N – общее число испытаний.

Задача №1.

Чтобы определить, как часто встречаются в лесопарке деревья разных пород, ребята провели следующие эксперименты. Каждый выбрал свою тропинку и по пути следования записывал породу каждого десятого дерева.

Результаты были занесены в таблицу:

Породы	Сосна	Дуб	Береза	Ель	Осина	Всего
Число деревьев	315	217	123	67	35	757

Оцените вероятность того, что выбранное наугад в этом парке дерево будет:

а) сосной;
б) хвойным;
в) лиственным.

Указание. Ответ запишите в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой.

Задача №1.

Решение:

а) A={выбранное наугад в парке дерево - сосна}

$N_A = 315$, $N = 757$, $P(A) = 315/757 \approx$ **0,416**;

б) B ={выбранное наугад в парке дерево - хвойное}

$N_A = 315 + 67 = 382$, $N = 757$.

$P(A) = 382/757 \approx$ **0,505**;

в) C = {выбранное наугад в парке дерево - лиственное}

$N_A = 217 + 123 + 35 = 375$, $N = 757$.

$P(A) = 375/757 \approx$ **0,495**.

Задача №2.

По статистике, на каждые 1000 лампочек приходится 3 бракованные. Какова вероятность купить исправную лампочку?

Решение:

3/1000 = 0,003

1 – 0,003 = **0,997**

Задача №3.

Демографы утверждают, что вероятность рождения близнецов равна 0,012. в скольких случаях из 10 000 рождений можно ожидать появление близнецов?

Решение:

$$P(A) = 0{,}012$$

$$N = 10000$$

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

$$\frac{N_A}{10000} = 0{,}012$$

$$N_A = 0{,}012 \cdot 10000 = 120$$

Ответ: в 120 случаях.

Вопросы:

1. **Запишите формулу вычисления вероятности случайного события в классической модели. Поясните, что означает каждая буква в этой формуле.**
2. **Запишите формулу вычисления вероятности случайного события в статистической модели. Поясните, что означает каждая буква в этой формуле.**
3. **Какому условию должны удовлетворять исходы опыта, чтобы можно было воспользоваться классическим определением вероятности?**
4. **Чему равна частота достоверного события?**
5. **Что такое абсолютная частота? относительная частота?**
6. **Как частота связана с вероятностью?**
7. **После 100 опытов частота события *A* оказалась равна 0, а частота события *B* равна 1. Можно ли сказать, что событие *A* невозможное, а событие *B* – достоверное?**